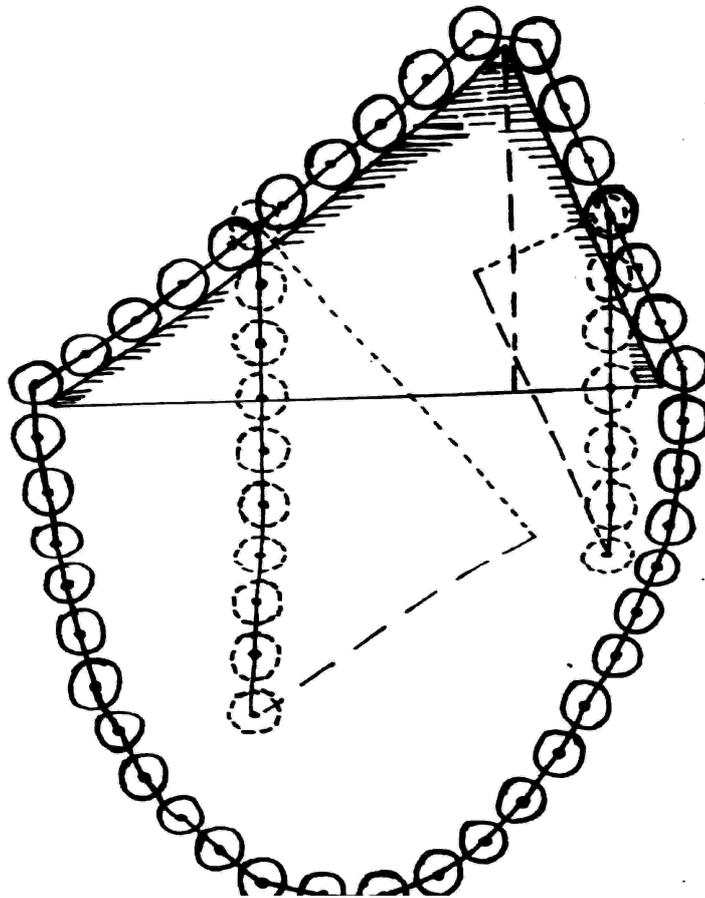


# Les forces

une introduction

Manfred Von Mackensen



Traduit de l'allemand en janvier 2016 par Pierre Paccoud à partir de la deuxième édition datée de 1979 de la Berufsbildenden Gemeinschaftswerk à Kassel

# Table des matières

	<b>page</b>
Préambule	3
La force de réaction	4
Contre-forces	5
Forces de forme	6
Ressorts	7
Transmission des forces	8
Composition des forces	11
La loi du cosinus	15
Décomposition des forces	16
Figures en étoile	18
Solidité	20
Les poutrelles	22
Pièces portantes	25
Les potences	32
Les ponts	36
Plans inclinés	43
La figure de Stevin	48

## Préambule

Ce petit fascicule propose d'introduire à un domaine de la physique qui semble très intéressant à l'auteur. Vu que certaines questions méritent d'être éclaircies en profondeur, il y en aura nécessairement beaucoup d'autres qui resteront non-traitées et qui sembleront peut-être à certains encore plus importantes.

La chose est présentée d'une façon telle que le lecteur pourra poursuivre par lui-même la réflexion en apprenant par exemple à évaluer des applications simples de la physique dans la vie de tous les jours et à y appliquer aussi des approches par le calcul. Dans ce but, je propose aussi le livret : Exercices de mécanique, problèmes sur la chute, la trajectoire et les forces, avec solutions.

Pour sa vérification du présent texte et de son édition, je remercie mon collègue Peter Baum, de Kassel.

Je suis redevable aussi de plusieurs rectifications de la deuxième édition à Hans Simon, de Benefeld, qui a revu le texte en entier.

Depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1978, l'utilisation des unités dans le contexte de l'administration et du commerce a été étroitement réglementée (loi du 2/7/1969). En ce qui concerne le domaine scolaire, il n'existe cependant que des recommandations.

Dans les calculs, contrairement aux usages officiels, j'utilise comme unité de forces le **kilogramme et la Tonne**, dans le but de favoriser un vrai ressenti des valeurs. On entend par là naturellement la force de poids qu'une masse de cette grandeur – car le kg est une unité de masse – a, dans nos régions, si, par exemple on essaie de la soulever à la main. Les masses que je donne doivent donc être comprises comme devant être multipliées par l'accélération locale de la pesanteur pour devenir des mesures de forces. Mais si l'on veut être pointilleux, il suffirait de remplacer partout kg par kgp (kilogramme-poids).

On pourrait aussi à chaque fois convertir très exactement dans l'unité légale « Newton » : la force de poids d'un kg vaut 9,80665 Newton (N) couramment arrondi à 9,81. Mais habituellement, cette valeur à peu-près exacte – seulement à peu près – correspond à l'accélération de la pesanteur g au niveau de la mer à la latitude terrestre de 45° où  $g = 9,8062939 \text{ m/s}^2$

Si l'on veut avoir pour un kg une force pesante de 9,80665 N (en prenant le facteur de conversion établi), il faut monter au-dessus de la latitude de 45° (Turin) de 23 minutes et 28,7 secondes ; et pour la valeur arrondie de 9,81, il faut aller jusqu'à 49° 8' 15" (Heilbronn).

Je ne doute pas que la perspective de ces laborieuses conversions saura éveiller chez le lecteur l'impression que la simplification que je propose est vraiment salutaire pour entrer dans l'étude ;-).

Et c'est dans ce sens qu'a été pensé ce livret.

## La force de réaction

Quelqu'un veut mettre quelque chose en mouvement par sa propre force. Il pousse par exemple un cycliste, un traîneau, quelqu'un sur des rollers, ou encore quelqu'un sur une barque pousse une autre barque.

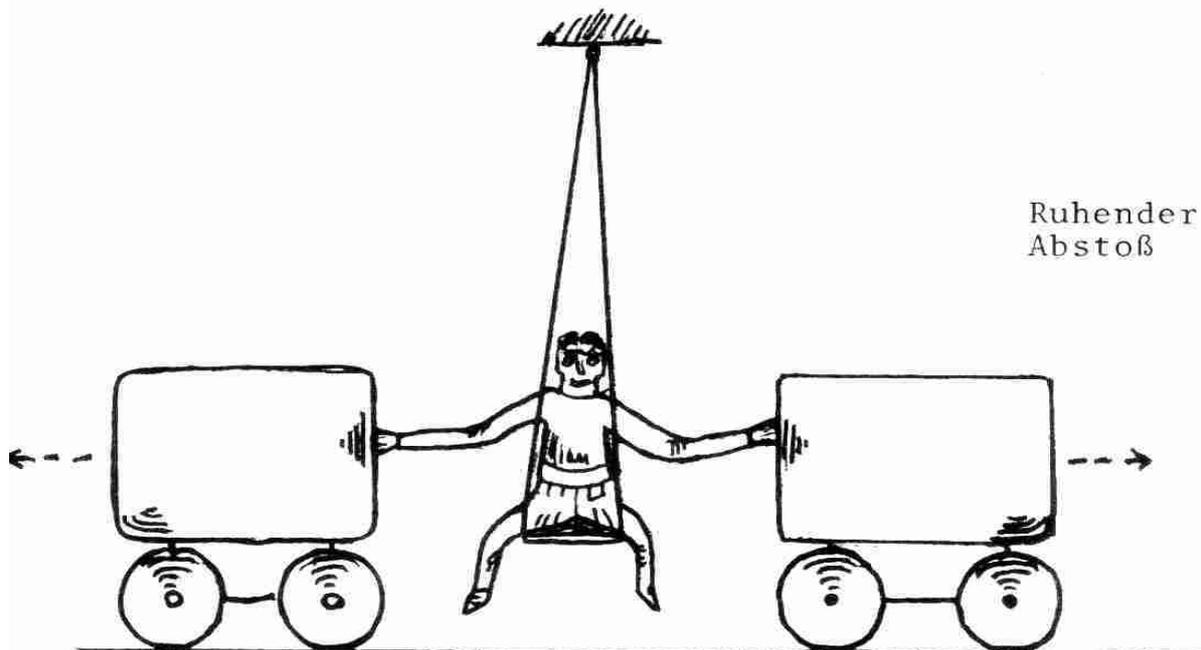


Poussée mobile

Nous désignons les forces par des flèches. Celui qui pousse a conscience de la flèche a (partant de lui). Cette flèche a à voir avec son point de vue à lui. Pourtant, ce qu'il ressent, et quiconque en a l'expérience compte avec, c'est que sa propre barque subit elle aussi une force qui la déplace. On connaît ce phénomène sous la forme du « recul » avec un canon. Quelle est la force la plus grande ? Celle qu'on a voulu exercer vers l'avant ou celle que l'on n'a pas voulue et qui s'oriente vers l'arrière ? En effet, on a toujours une force vers l'avant et une force de réaction. D'habitude quand on tire (au fusil), on cherche un point fixe, on donne un appui à la force de recul, faute de quoi elle nous fait bouger nous-même.

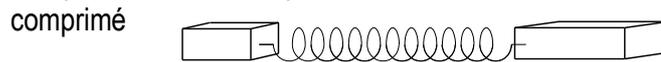
Nous nous représentons deux chariots identiques sur une surface plane horizontale. Entre les deux, un homme est assis sur une balançoire, et il doit les pousser. Il lui faut pousser de sorte que les deux chariots s'écartent, mais lui pourtant reste immobile.

Poussée immobile



Si on fait l'expérience de façon très précise, on obtient pour résultat que les deux chariots partent à la même vitesse et vont à la même distance et dans ce cas seulement, la balançoire reste tout à fait immobile. Il en est de même si le pousseur se tient sur des patins à roulettes.

On peut aussi le remplacer par un ressort comprimé. Il est bien connu qu'un ressort d'acier pousse des deux côtés de la même façon lorsqu'il est mis en compression.



La chose ne se produit bien sûr pas que dans le cas de la compression. C'est vrai aussi avec les ressorts en étirement pour les tractions qu'ils engendrent.

Nous voyons donc :

- Chaque force agissante a sa force de réaction de même intensité dans la direction opposée (actio = reactio selon Newton)
- Force agissante et force de réaction ont la même importance, ce n'est que du fait de l'intention humaine que l'une des deux est privilégiée.

## Contre-force

Nous avons établi dans le chapitre précédent que lors de toute manifestation de forces, il apparaît toujours deux forces simultanées que nous avons appelées force agissante et force de réaction. La façon dont nous leur attribuons ces deux dénominations n'est qu'une question de point de vue. Ces deux forces agissent à chaque fois sur les autres objets en partant de l'objet qui engendre. Et là, elles mettent quelque chose en mouvement ou poussent ou tirent sur les objets.

Si l'on tire entre ses deux mains un tendeur, un peson, un élastique ou simplement une corde, en tenant cela devant soi, on a directement l'impression que les deux mains tirent avec la même force :

Extenseur

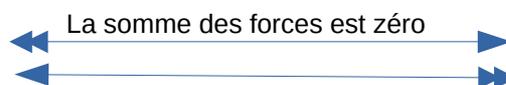
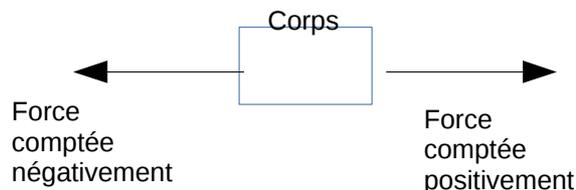


Dans le jeu du tire-à-la-corde, on perçoit aussi que lorsque la corde reste immobile, c'est que les deux équipes tirent avec la même force. Tout cela semble évident. Mais on en déduit un principe qui nous mène très loin : lorsqu'un corps est immobile, il faut nécessairement que toute force agissante identifiée soit confrontée à une contre-force qui neutralise la première, qui la contrarie. Cette contre-force doit agir exactement dans le sens contraire à celui de la force en question. Un cas particulier est celui où l'on tire contre soi-même, par exemple avec un extenseur. La force de réaction de l'une des deux main est transmise à l'autre et agit sur l'extenseur comme une contre-force. Et il en est de même si l'on considère à partir de l'autre main.

Dans une formulation générale du principe, on dit :

Sur un corps immobile, la somme des forces agissantes est égale à zéro.

Quand deux forces tirent en sens contraire dans la même direction, l'une des deux sera en effet comptée négativement.

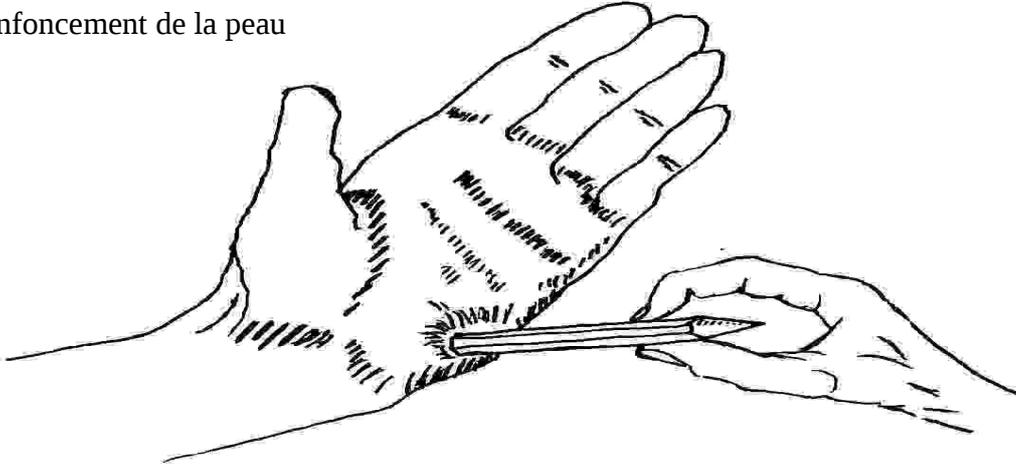


Ceci a de très nombreuses conséquences. Toute charge doit rencontrer une force portante de même intensité si on ne veut pas qu'elle modifie son support.

## Forces de forme

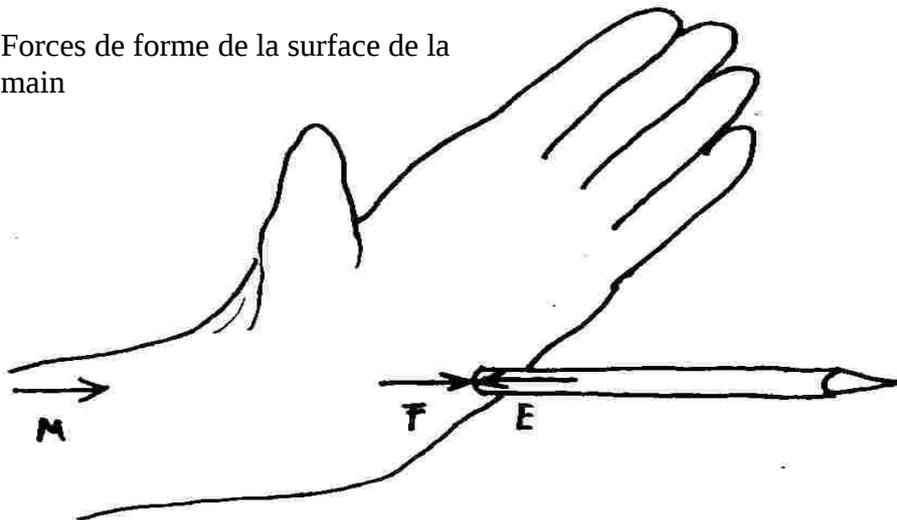
On met sa main devant soi. Puis on appuie doucement avec l'extrémité arrière d'un crayon sur la paume de la main. Il se forme un petit creux. On appuie plus fort : le creux devient plus profond, et la main doit résister. Quelles sont les forces à l'œuvre ?

Enfoncement de la peau



Considérons tout d'abord au ralenti le moment où le crayon touche la peau (avant qu'il ne la pousse devant lui jusqu'à la marquer d'un creux). La force qui agit à partir du crayon ne rencontre pas encore de contre-force. C'est pourquoi la peau n'est pas immobile. Pour elle, il n'y a pas encore d'équilibre de forces. Seul agit la force du crayon  $E$ , elle déplace ce qui est devant elle : le crayon, la peau, les couches musculaires superficielles. Lorsque le creusement se poursuit, le mouvement s'apaise progressivement. Au point de contact du crayon intervient en effet, depuis l'intérieur, une contre-force élastique qui découle effectivement de la déformation de la peau et des couches musculaires superficielles. Nous pouvons l'appeler la **force de forme**  $F$ .

Forces de forme de la surface de la main

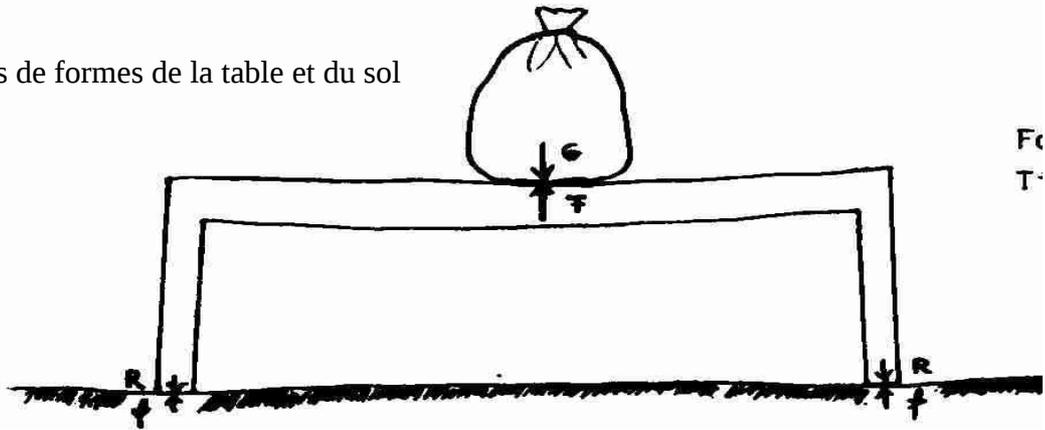


Cette force de forme  $F$  provient finalement du bras, c'est-à-dire de la force musculaire  $M$  qui maintient la peau contre le crayon. C'est dans le muscle que nous pressentons la contre-force. C'est elle qui donne appui à la force de forme. Celle-ci est donc de la même intensité que la force musculaire exercée par le bras, mais elle est appliquée à un autre endroit, et elle est d'une autre nature. Enlevons donc le crayon et sa force  $E$ . La contre-force musculaire du bras disparaît aussi, mais la force de forme  $F$  continue à agir quelques secondes. Comme elle est maintenant toute seule, non bloquée par une contre-force (telle que  $E$ ), elle provoque du mouvement et repousse la peau faisant progressivement disparaître le creux. Dès que quelque chose bouge, il faut nécessairement qu'une force soit à l'œuvre, et ici, ce ne peut être que la force de forme. (Les complications du genre pression sanguine dans les muscles et dans la peau doivent ici rester hors sujet). La

force de forme a disparu lorsque le creux s'est complètement aplani. Elle n'était donc qu'une réponse à la force agissant de l'extérieur, et elle ne subsiste en provoquant du mouvement qu'un temps bref après la disparition de celle-ci. Plus la force agissante est grande, plus la force de forme l'est aussi. Le creux se formera autant qu'il le faut (déformé par la tension) pour que la force de forme soit capable d'équilibrer la force agissante, et l'immobilité s'établit alors.

Avec quelle intensité survient la force de forme au cours de la déformation, voilà qui dépend totalement du matériau, selon qu'il est plus ou moins élastique et plus ou moins mou. Une table en bois par exemple, ne fléchit que très peu sous l'effet d'une charge.

Forces de formes de la table et du sol



Du fait du fléchissement sous l'effet du poids  $G$ , survient en une fraction de seconde une force de forme  $F$  égale, et ici, beaucoup de force pour très peu de déformation. Cette force de forme va finalement être accueillie par le sol. On peut comprendre la chose comme cela : la force de forme  $F$  doit avoir une force de réaction qui se répartit en deux moitiés sur les pieds (dans le cas où il n'y en aurait que deux). Les flèches  $R$  ont donc une longueur égale à la moitié de  $G$  (un peu plus car il faudrait ajouter le poids de la table). Les forces  $R$  impriment le sol de nouveau jusqu'à ce que les forces de forme  $f$  les arrêtent. Leurs forces de réaction se répandent et se perdent dans le sol.

## Ressorts

Avec les ressorts mis en oeuvre dans les fauteuils, les véhicules, les poussettes d'enfants etc., on utilise la déformation et la résilience, et dans d'innombrables appareils mécaniques, la résilience élastique sert de moteur : cadrans téléphoniques d'autrefois, tapette à souris, stylo-bic, montre mécanique... À ceci s'ajoutent tous les usages de caoutchoucs élastiques : l'élastique d'un vêtement est capable de garder sa force toute la journée !

Pour la fabrication de rubans de caoutchouc durables et robustes, la grande découverte a été ce qu'on appelle la vulcanisation du caoutchouc collant, par le soufre. C'est la chaleur et le soufre qui permettent d'obtenir un matériau durablement élastique.

Pour les ressorts en acier, c'est également un traitement thermique consistant à chauffer jusqu'à la quasi-incandescence, à tremper dans l'eau froide et à réchauffer doucement. Ceci transforme l'acier en lames de ressorts par exemple (ne parlons pas des alliages avec d'autres métaux). Dans le domaine des matériaux élastiques, on rencontre donc le soufre et le fer, dont l'interaction et la polarité se trouvent en arrière-plan de nombreux phénomènes de la nature.

Un autre domaine du comportement élastique, c'est le vivant lui-même. Tout ce qui vit, que ce soit le bois ou la peau, peut se plier, s'étirer, et fait ressort. Seul ce qui est mort, - et déjà l'os, au contraire du cartilage-, est non-élastique ; de faibles torsions conduisent à la fracture. Il va de soi que le béton aussi est capable de flexions ou d'enfoncements élastiques. Mais à d'infimes déformations répondent aussitôt d'énormes forces de forme qui bloquent les forces actives. De faibles déformations engendrent de grandes forces de forme avant que le matériau ne se brise ou ne s'écrase. Tous les objets sont donc tant soit peu élastiques.

La relation entre déformation et force de forme peut être très simple, pour les ressorts d'acier : à déformation

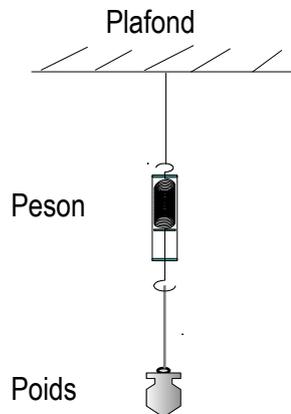
double, force double. La force de forme est proportionnelle à la déformation et grandit rigoureusement comme elle. On appelle cela la loi de Hooke (ceci ne s'applique ni à la pierre ni au béton). Si on fait croître la force active par pas réguliers, les pas de déformation seront eux aussi constants. Mais l'allongement, par exemple, va devenir à un moment donné, non-proportionnel à la force de traction. Et si l'on augmente la charge, le matériau ne retrouvera plus son état initial après disparition de la force déformante. Il gardera une déformation résiduelle. La force de forme du matériau a donc disparu trop tôt, avant le retour complet à la forme initiale : c'est qu'on a outrepassé la limite d'élasticité. Mais indépendamment de cela, on a des ressorts « souples » et des ressorts « raides », selon le degré d'allongement, de torsion ou de rétraction qu'ils subissent par unité d'intensité de force active.

Mais même les bons ressorts d'acier se fatiguent progressivement. Les forces d'élasticité décroissent, le ressort mollit, voire, s'avachit. Du fait d'une tension constante et des mouvements, de petites fissures apparaissent dans le matériau, ce qui fait que la section d'élasticité efficace décroît. On voit cela dans les vieilles voitures : les roues s'enfoncent davantage dans les ailes de la carrosserie.

En plus des ressorts de suspension, les véhicules ont aussi besoin d'amortisseurs. Le mouvement de la masse non-suspendue – la roue - doit être freiné dans ses oscillations afin de ne pas cogner. Les forces élastiques ne sont pas suffisantes pour cela en cas de mouvements brutaux (nids de poules), car il faut que la suspension soit quand même souple. Ce mouvement sera donc freiné par ce qu'on appelle les amortisseurs à frottement hydraulique. Lorsqu'on suit en voiture un véhicule aux amortisseurs défectueux, on voit que ses roues oscillent continuellement même sur une chaussée lisse. Du fait que les roues n'adhèrent pas de façon régulière sur le sol, la distance de freinage de la voiture se trouve accrue. Les freins, les pneus, mais aussi les amortisseurs, jouent un rôle très important pour le freinage.

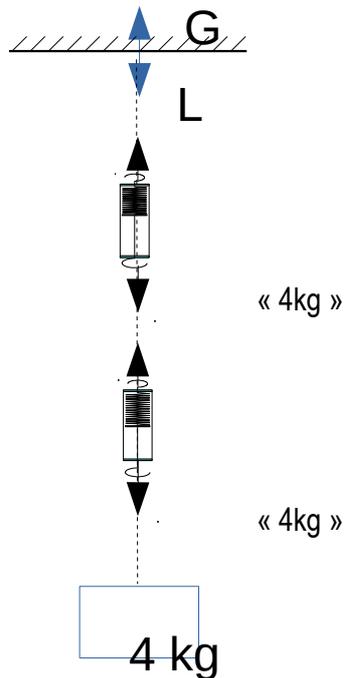
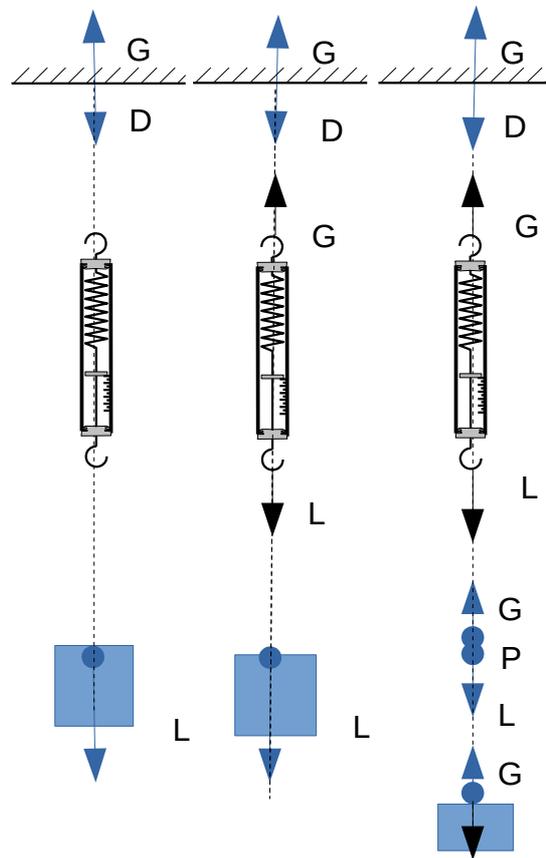
## Transmission des forces

Lorsqu'une force (un poids par exemple) tire sur une corde ou une tringle, la corde ou la tringle est soumise à la tension correspondante. On peut par exemple suspendre un poids à un peson lui-même accroché au plafond par une autre corde. La corde est tendue par la force du poids. Le crochet, au plafond doit fournir une contre-force de même intensité, sinon, il serait mis en mouvement vers le bas, donc arraché.

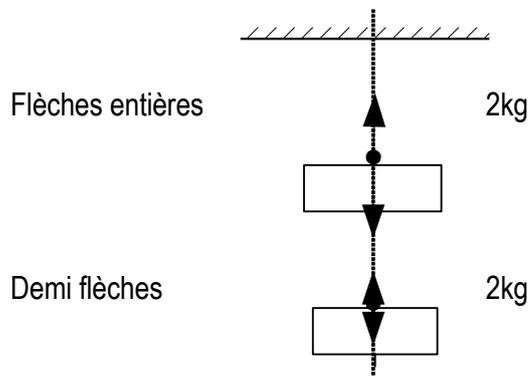


On peut donc tout d'abord partir de trois forces : La force qui charge L, son accrochage au plafond D et la contre-force G fournie par le plafond.

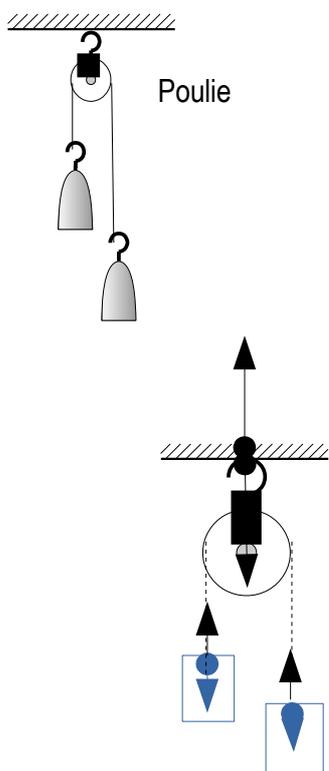
La force de charge (active) tire autant sur le peson, que le fait la contre-force. C'est pourquoi le peson est en tension et donne une mesure. À côté de cela, on peut se dire que le point de la corde auquel la charge L est accrochée, est constamment immobile. C'est donc qu'une contre-force de même intensité que le poids doit tirer là, vers le haut.



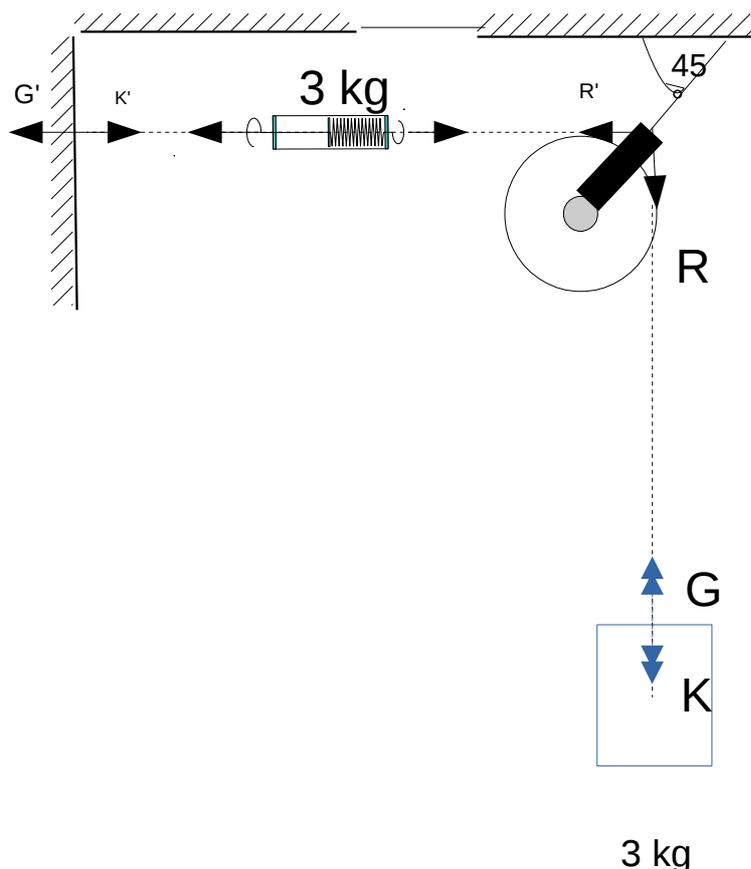
De la même façon, on peut couper la corde à n'importe quel endroit : partout, force et contre-force sont présentes et se neutralisent. Et à ce point P, on pourrait aussi placer un deuxième peson. S'il est en traction, il se trouve soumis à la même tension que le premier peson, et il indiquera la même mesure (les pesons et les ficelles doivent être pensés comme de poids négligeable vis-à-vis du poids de la charge). Le poids que l'on mesure sur le peson du bas se trouve mesuré à nouveau par le peson du haut. Il ne faut donc pas additionner les deux mesures. La contre-force fournie par le crochet, est une force de réaction qui se répartit dans le plafond de sorte qu'au final, le poids charge naturellement le plafond, c'est-à-dire le tire vers le bas.



Si l'on accrochait l'une en dessous de l'autre deux moitiés du poids, on n'aurait entre les deux à ne dessiner que des demi-flèches de forces.



Si l'on dévie une force par une roue, ce qu'on appelle une poulie, grâce à un palier presque sans frottement, la force ne sera pratiquement pas affaiblie. Seule sa direction change. Pour une déviation de  $180^\circ$ , c'est-à-dire un renvoi dans le sens opposé, la poulie doit supporter la force initiale en sollicitant de son point d'attache une contre-force de même intensité ! Mais la force transmise tire, en tant que contre-force, avec une intensité aussi grande sur la poulie, de sorte que son point d'accrochage doit supporter deux fois la force. Les relations de forces sont multiples dans le cas d'une déviation à angle droit si on ne se contente pas d'utiliser seulement la poulie pour dévier la force mais que l'on s'intéresse aussi aux forces exercées sur sa suspension.



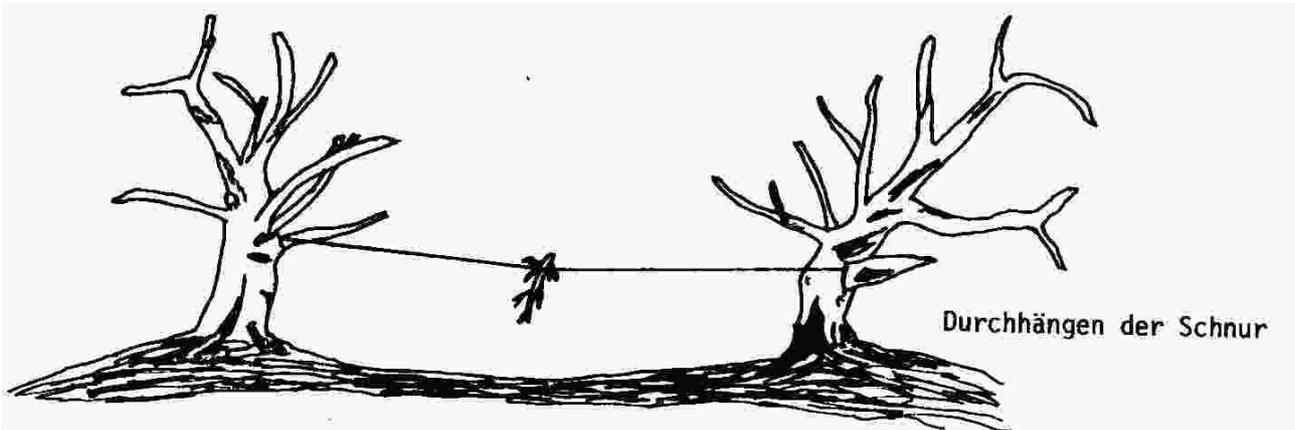
3 kg

Une force de poids  $K$  tire sur la corde. Celle-ci transmet la force sans l'affaiblir et la poulie la transmet dans une quelconque nouvelle direction. Elle tire finalement sur un crochet mural : on a donc là une force  $K'$  qui agit avec la même intensité que  $K$ . C'est ce que montrent aussi les peson intercalés. Mais  $K'$  est une force nouvelle engendrée par la suspension de la poulie. En effet, rien n'agissait auparavant dans cette direction :  $K$  tire perpendiculairement à  $K'$ . Sans la poulie, on n'aurait aucune action dans cette direction - mais rien ne bouge du côté du mur. C'est donc que  $K'$  doit, comme toute force qui apparaît, avoir sa contre-force. Nous l'appelons  $R'$  et nous la dessinons au point d'attache de la corde de suspension de la poulie. De la poulie elle-même ne peut provenir aucune force tangentielle vu qu'elle tourne librement.

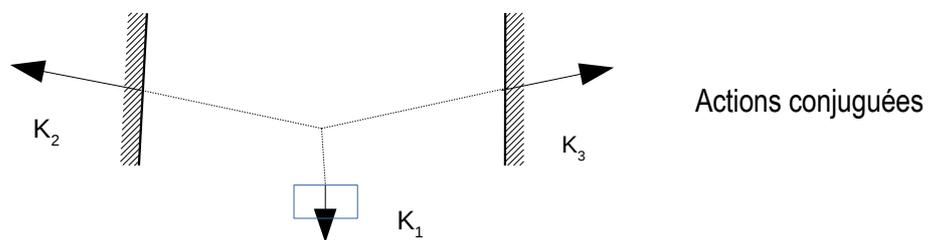
Sur le crochet mural agit une force de forme du mur (contre-force  $G'$ ), car le crochet reste bien fixé. Vu que le poids est transmis par la corde, la contre-force  $G$  agit à l'autre bout de la corde. Et elle est également perpendiculaire à la force de forme du mur, elle n'est donc pas retenue par lui. Elle doit avoir sa propre force de réaction  $R$  qui tire, en association avec  $R'$  sur la corde de suspension de la poulie pour lui donner un angle de  $45^\circ$  ! Quelle est la force que  $R$  et  $R'$  engendrent dans cette corde de suspension ? Autrement dit, quelle longueur faudrait-il donner à la flèche qui la représente ? C'est ce que nous rechercherons ensuite.

### Composition des forces

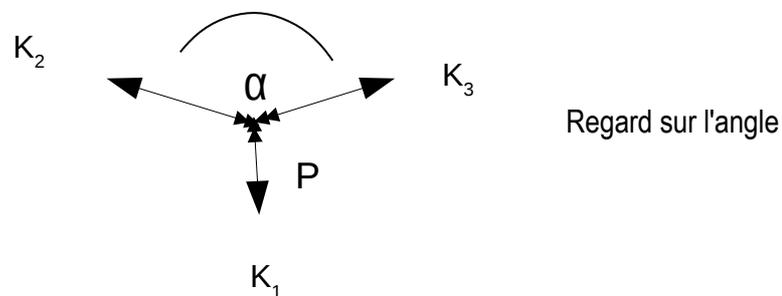
Tout le monde sait ça : Quand on a ficelé un colis bien serré, si on le soulève par sa ficelle, elle devient lâche, et on voit qu'il faudrait la retendre. Et pour ce faire, il nous faut tirer sur la corde avec une force bien plus grande que celle qu'exerce le poids du colis quand on le soulève. Si l'on y regarde de plus près, on voit que quand on soulève le colis, la ficelle s'incrute en lui et se soulève donc facilement de 2 cm au-dessus. D'où vient cette grande force responsable de cette incrustation, de ce relâchement de la ficelle ? Ce n'est pas le poids du colis à lui tout seul. Essayons une fois la chose suivante : tendons une grosse corde entre deux arbres bien solides – aussi tendue que possible. On peut sûrement exercer une tension de 20 kg, voire bien davantage.



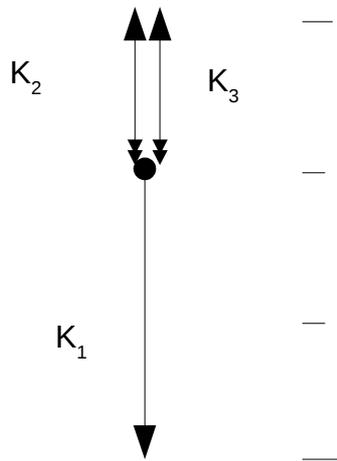
En nous plaçant derrière l'un des troncs, visons de l'œil notre corde dans sa longueur, et on voit que rien que par les quelques grammes de son propre poids, la corde marque un léger fléchissement. Un petit rameau posé dessus la fait se couder significativement. Deux forces puissantes (aux points d'attache) sont contrariées par une force toute faible (le poids du rameau suspendu).



Nous pouvons faire glisser les trois forces  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  le long de leur droite d'action, c'est-à-dire le long de la corde, afin de les ramener sur le point de concours. Le coude se présente alors ainsi.

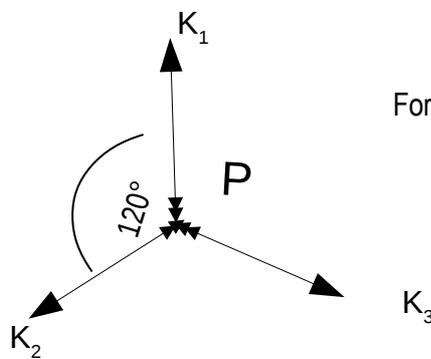


Si l'on pouvait négliger le poids de la corde, elle pourrait être tendue parfaitement droite jusqu'au point P, au milieu, où s'applique la force verticale  $K_1$ . Et là apparaît un angle qui dépend à l'évidence des trois forces.



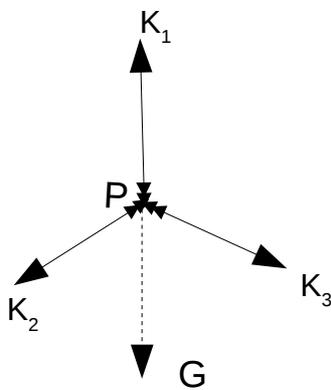
Addition des forces

Si  $K_1$  disparaît,  $\alpha$  vaut assurément  $180^\circ$ . L'angle  $\alpha$  peut-il aussi prendre la valeur  $0^\circ$  ? pour le faire décroître (le rendre plus aigu), il faut à l'évidence que  $K_1$  tire encore plus fort. Et si finalement  $K_1$  devient égale à la somme de  $K_2$  et  $K_3$ , il faut que ces dernières tirent complètement en opposition à  $K_1$  pour que le point P reste immobile. Si  $K_1$  devient ne serait-ce que légèrement supérieure à  $K_1 + K_2$ , P se met en mouvement et  $K_1$  et  $K_2$  se font arracher. On élimine ce cas puisque nous envisageons l'angle  $\alpha$  pour un équilibre au repos. Considérons par exemple la configuration de l'étoile de Mercedes.

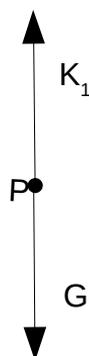


Forces symétriques

Les trois forces sont égales et les angles font tous  $120^\circ$ . Vu que la construction est symétrique (axe ternaire), on ne peut pas en déduire une direction préférentielle dans laquelle elle pourrait se mouvoir. C'est donc un état de repos. Et c'est ce que confirme l'expérience. Donc, pour cet angle, deux forces sont toujours en train d'équilibrer la troisième ; par exemple  $K_1$  et  $K_2$  équilibrent  $K_3$ . Or nous savons qu'une force ne peut maintenir son point d'application en équilibre que si une contre-force de même intensité s'applique aussi à ce point. Où se trouve-t-elle ?  $K_2$  et  $K_3$  tirent dans des directions différentes... Tout bien considéré, il nous faut donc admettre que cette contre-force G existe :



La force G que nous devons admettre ne peut venir que de  $K_2$  et  $K_3$  car aucune autre force ne s'exerce ici. G représente bien l'action de traction vers le bas des forces  $K_2$  et  $K_3$ , et ces dernières doivent complètement équivaloir à G. Leurs effets de tractions obliques s'annulent mutuellement en raison de la symétrie de la configuration. Nous remplaçons donc  $K_2$  et  $K_3$  par cette nouvelle force G.



Évidemment, on pourrait aussi bien rassembler un autre duo des forces d'origine pour construire ce qu'on appelle leur Résultante, laquelle serait aussi l'exacte contre-force de la troisième.

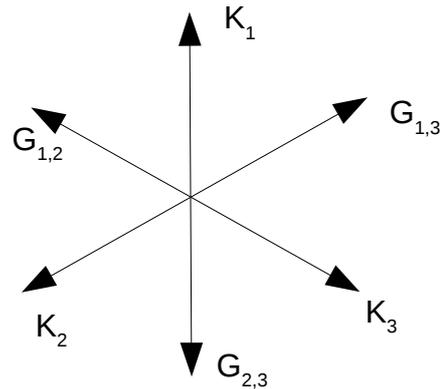
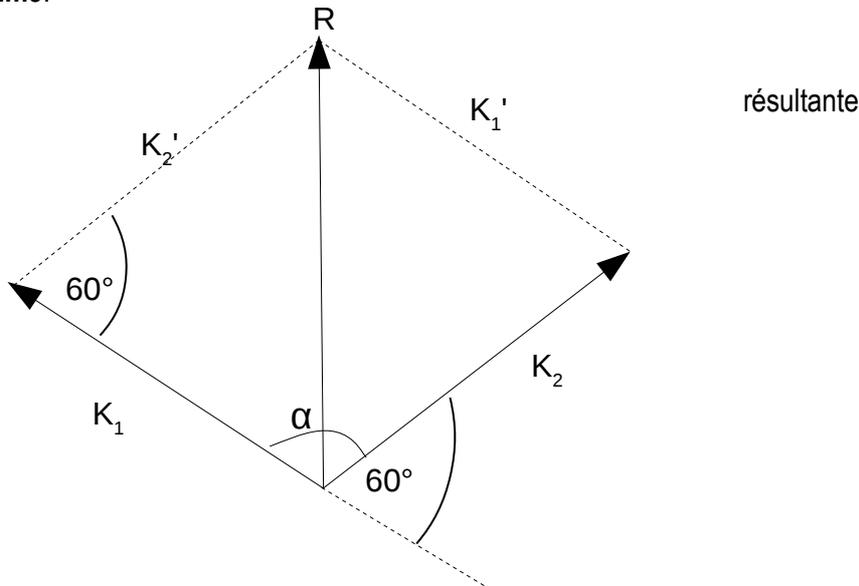
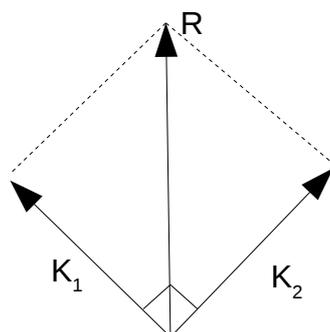


Figure des contre-forces

$G_{2,3}$  est par exemple la contre-force issue de  $K_2$  et  $K_3$ , qui équilibre  $K_1$ . La force résultante de deux forces égales, capables de les remplacer à leur point d'application se trouve nécessairement en symétrie au milieu d'elles (bissectrice). Mais ce n'est que pour l'angle de  $120^\circ$  qu'elle a exactement la même intensité que les deux forces. Comment trouve-t-on son intensité dans le cas d'un angle quelconque ? On doit réaliser ici plusieurs configurations expérimentales dont l'observation va conduire finalement à ce que l'on appelle la **loi du parallélogramme**.

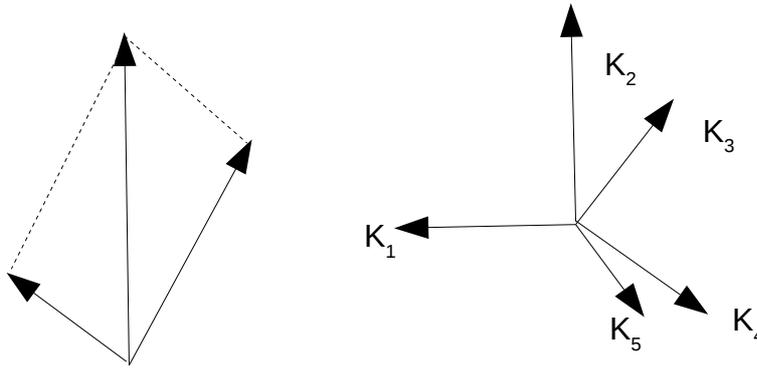


Le dessin des deux forces  $K_1$  et  $K_2$  doit être complété pour donner un parallélogramme (on trace par exemple le segment  $K_1'$  parallèle et égal à  $K_1$ ). La diagonale  $R$  issue de l'angle de départ en direction du nouveau sommet tracé donne la direction et l'intensité de la résultante. Pour l'étoile de Mercedes avec son  $\alpha$  de  $120^\circ$ , on a un angle extérieur de  $60^\circ$  que l'on peut faire glisser parallèlement pour donner l'angle intérieur du triangle de sorte que des triangles égaux apparaissent ce qui fait que  $R$  doit avoir la même longueur que  $K_1$  (et  $K_2$ ), ce que nous avons déjà établi par une autre méthode précédemment. Une telle construction de parallélogramme peut, comme l'expérience le confirme, être réalisée pour n'importe quelle valeur angulaire. Pour  $\alpha = 90^\circ$ , le parallélogramme devient un carré et  $R$  devient égale à  $2^{1/2} \times K_1$ .

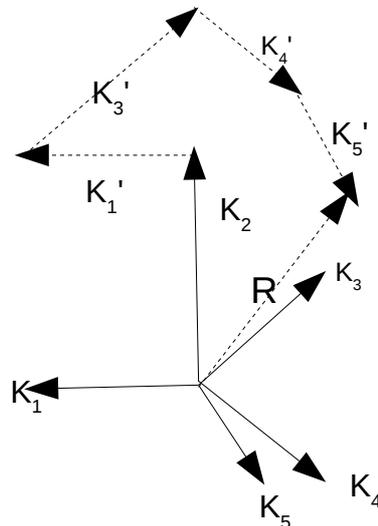


Parallélogramme des forces

La règle marche aussi lorsque les deux forces sont inégales. La diagonale est alors naturellement plus proche de la plus grande des deux forces (dessin de gauche).



Si l'on devait chercher la résultante d'un système de  $n$  forces, il faudrait alors construire successivement plusieurs parallélogrammes ( $n-1$ ). On choisit deux forces 1 et 2 et on dessine leur parallélogramme pour obtenir leur résultante  $R_{1,2}$ , avec laquelle on dessine avec  $K_3$  un nouveau parallélogramme d'où sort  $R_{1,2,3}$ , et ainsi de suite. Une telle résolution est plus lisible si l'on simplifie les parallélogrammes en ne dessinant pas les segments inutiles, c'est-à-dire en ne dessinant que l'un des deux côtés supplémentaires par glissement parallèle.



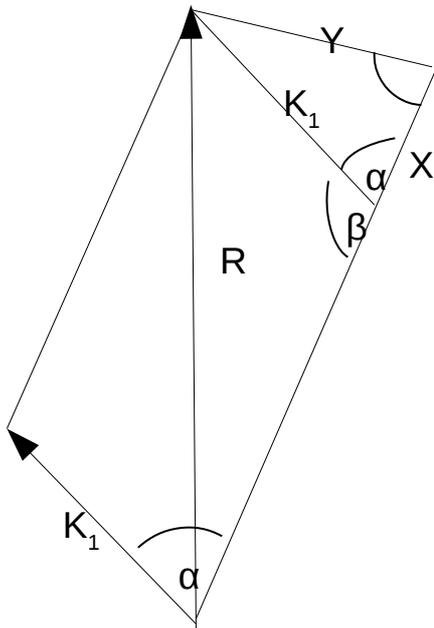
La règle du « **pied sur la tête** »

Chaque flèche de force est tracée avec son pied partant de la tête du côté parallèlement glissé précédent. On peut appeler cela la « règle du pied-sur-la-tête » (addition vectorielle). La résultante finale est alors la flèche partant du pied de la première vers la tête de la dernière. Si on fait cela avec l'étoile de Mercedes, on obtient un triangle équilatéral fermé : la tête de la dernière flèche se trouve au pied de la première, la résultante est nulle, comme on l'a déjà deux fois démontré.

## La loi du cosinus

À l'aide des concepts et des règles données jusqu'ici, on peut résoudre toutes sortes de problèmes de mécanique dont on trouve des exemples en Annexe. On y trouve aussi des modèles de résolution par la méthode graphique ou, pour des triangles réguliers, par le calcul géométrique.

Un mode de résolution tout à fait général peut être tiré de la loi du cosinus.



On trace un parallélogramme de forces à partir de deux forces données  $K_1$  et  $K_2$ . On veut trouver par le calcul la résultante  $R$ . Pour cela, ajoutons un triangle rectangle de côté  $x$  et  $y$  et appliquons-y la loi du cosinus :

$$X/K_1 = \cos \alpha \quad X = K_1 \cos \alpha \quad (1)$$

$$Y/K_1 = \sin \alpha \quad Y = K_1 \sin \alpha \quad (2)$$

« Pythagore » nous dit que :  
 $R^2 = Y^2 + (K_2 + X)^2$

Introduisons (1) et (2) :

$$R^2 = K_1^2 \cdot \sin^2 \alpha + K_2^2 + 2K_2 \cdot K_1 \cos \alpha + K_1^2 \cos^2 \alpha$$

Vu que d'après Pythagore on a toujours  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  il en résulte :

$$R^2 = K_1^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + K_2^2 + 2K_2 \cdot K_1 \cos \alpha$$

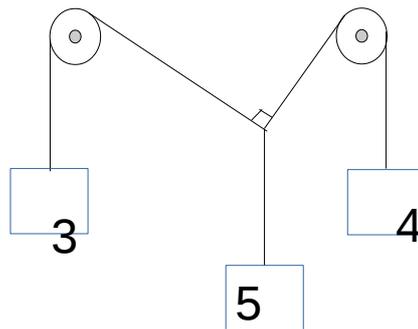
$$R^2 = K_1^2 + K_2^2 + 2K_2 \cdot K_1 \cos \alpha$$

La formule marche aussi dans les cas que nous avons vu par ailleurs où  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$  et  $\alpha = 180^\circ$

Le signe qui change par rapport à la loi du cosinus ( $R^2 = K_1^2 + K_2^2 - 2K_2 \cdot K_1 \cos \beta$ ) s'explique du fait que  $\alpha = 180 - \beta$  et donc  $\cos \alpha = - \cos \beta$

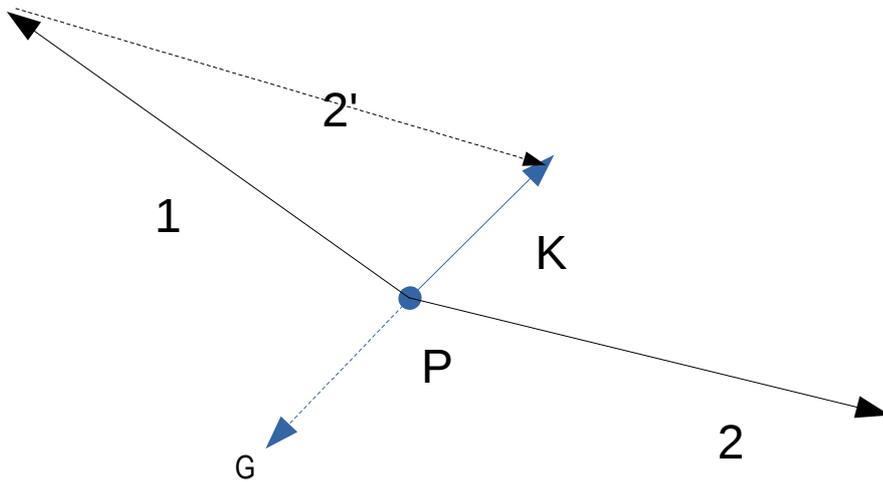
## Décomposition des forces

Pensons à l'expérience suivante :



En dépit de toutes les secousses qu'on donne à la corde, la figure s'immobilise toujours avec un angle droit. Et en effet, la corde qui tire avec la pente la plus raide est aussi celle qui tire le plus fort (poids 4). Il suffit que les poids soient dans le rapport 3-4-5. Ça peut aussi être 300-400-500g, ou 120-160-200 ; à chaque fois, et on peut le vérifier en construisant selon la règle du parallélogramme, on trouve un angle droit. Mais qu'est-ce qui fixe les différentes directions des ficelles ? Nous saisissons ici une idée qui nous a déjà guidée pour la composition des forces : Le point  $P$  n'est pas seulement immobile dans la direction verticale, il l'est aussi dans l'horizontale, il ne se promène ni vers la droite, ni vers la gauche.





Dans le cas ci-dessus, nous avons, à partir de la petite force K produit deux « énormes forces » 1 et 2. Ces deux composantes peuvent être remplacées (toutes deux ensemble) par la première force, et réciproquement : Leur effet de mise en mouvement du point d'application P serait le même. Pour que le point P reste immobile, il faudrait appliquer, autant pour l'effet de K que pour celui des deux grandes composantes ensemble, une contre-force G. Et du fait que 1 est plus faible que 2, G tire naturellement davantage dans la direction de 1.

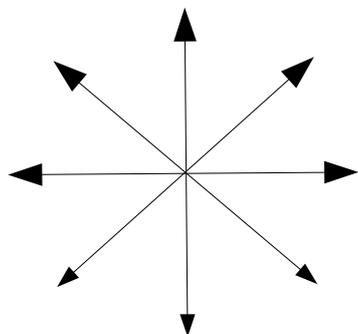
On pourrait ici dissiper un doute : comment détermine-t-on les forces réellement appliquées à un objet si, selon la règle, elles peuvent en engendrer d'autres dans toutes les directions ?... Souvenons-nous ici du chapitre « Forces de forme ». Toute force appliquée à un objet se remarque en principe par le creusement ou la bosse, bref, par la déformation qu'elle ajoute à la situation sans force appliquée. Dans la pratique, les déformations peuvent être très faibles. On y sera attentif par les objets qui sont au contact du corps en question, en effet, il n'y a pas d'effets de forces sans que quelque chose ne vienne au contact de l'endroit concerné. Ainsi, on peut la plupart du temps trancher sur le fait que de la traction ou de la compression est présente quelque part, et concrètement avec quel ordre de grandeur. Même avec le vent, on peut facilement savoir de quel côté il souffle.

Les résultantes que l'on trouve en composant les forces, ou les composantes que l'on construit par décomposition, ne sont pas matériellement présentes, et pourtant très utiles à connaître pour gérer ou annuler les mouvements.

### Figures en étoile

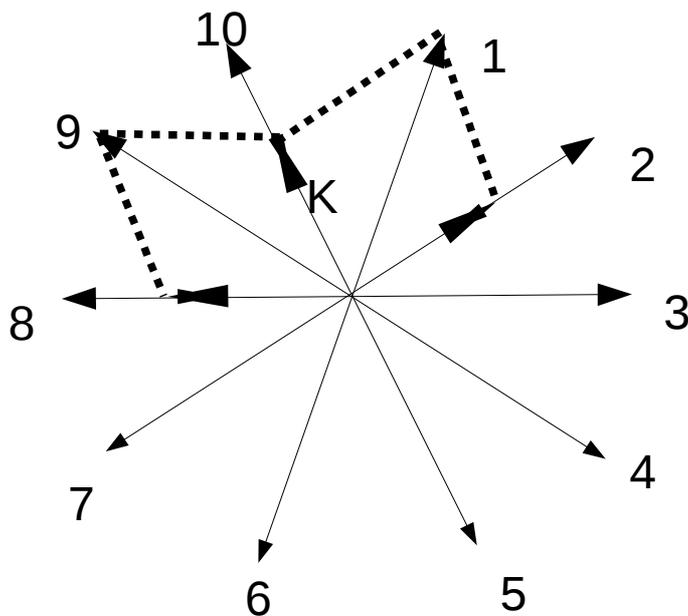
Lorsque trois forces tirent dans une forme d'étoile symétrique (étoile Mercedes), l'expérience montre que le centre est immobile (nous avons déjà éclairci cette question). Mais qu'en est-il pour des étoiles à quatre, à six ou à neuf ? Peut-on grâce au parallélogramme des forces, les ramener à des situations connues ?

Il ne fait pas de doute que toutes les étoiles paires sont immobiles vu que chaque force en a une opposée en face d'elle : toutes les forces s'annulent deux à deux.



Étoile de huit forces

Mais une étoile à cinq est-elle aussi immobile ? Réfléchissons tout d'abord à une étoile à dix, qui elle, est forcément en équilibre.



Dix forces en étoile

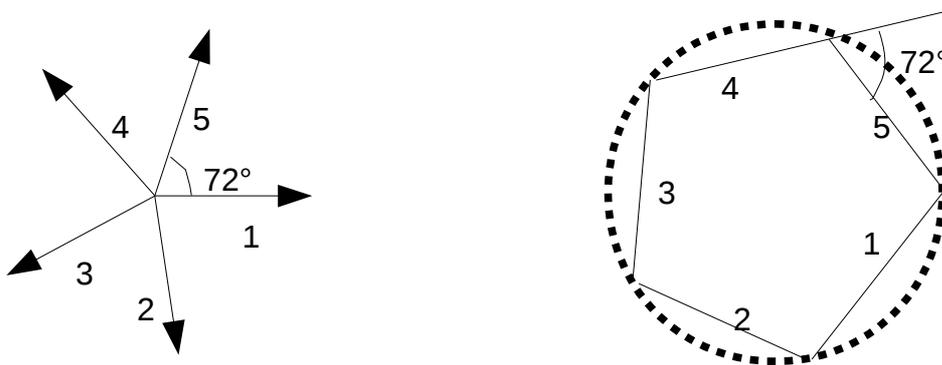
Une force sur deux (par ex les n° 1, 3, 5, 7, 9) peut être décomposée selon les directions des deux forces adjacentes. Le rayon 10, par ex. reçoit la composante K de 1 ; le rayon 2 reçoit une composante identique de 1. Mais 10 reçoit en plus une composante identique de 9.

On remarque de nouveau ici que les deux forces en lesquelles se décompose 1 ne sont, après additions, pas de la même longueur que 1, mais plus longues. Ces composantes additionnées ne pourraient avoir la longueur de la force d'origine (ici, le rayon 1), que si la décomposition se réalisait dans la direction même de cette force, donc si l'angle valait  $0^\circ$ . En effet, dans une décomposition de forces, (à la différence d'une simple fragmentation), de nouvelles forces apparaissent qui sont d'autant plus grandes que l'angle est grand. Mais comme on l'a dit, elles ne sont que pensées et non pas objectivement présentes : on n'introduit pas de modifications dans le monde physique.

Pourtant, elles sont décisives pour l'étude de la tendance au déplacement du point d'application.

Revenons à l'étoile à cinq : la décomposition proposée aboutit à une étoile à 5 vu que les rayons 2, 4, 6, 8 et 10 se sont vu allongés de plus du double, mais tous restant de longueurs identiques. Vu que l'étoile à 10 était immobile, celle en quoi on l'a transformée doit l'être aussi, ainsi que toutes les étoiles à cinq.

Mais il existe encore une autre méthode pour trancher sur l'étoile à cinq. Puisque nous avons décomposé les forces, nous pouvons essayer maintenant de les composer, et cela devrait donner zéro. Comparons tout d'abord une étoile à cinq et un pentagramme.



Somme de cinq forces en étoile

Donnons aux côtés du pentagramme des longueurs égales aux rayons de l'étoile. Chaque rayon a un côté du pentagramme qui lui est parallèle. Les rayons tournent en effet par pas de  $72^\circ$ , comme le font les côtés du pentagramme. Les uns tournent autour d'un point en cinq pas, et les autres s'inscrivent dans un cercle, ils tournent à l'intérieur d'une périphérie. Une simple translation des cinq forces de l'étoile aboutit ici à une ligne fermée sur elle-même, à un parcours fermé pentagonal. Mais cette ligne correspond à l'opération de

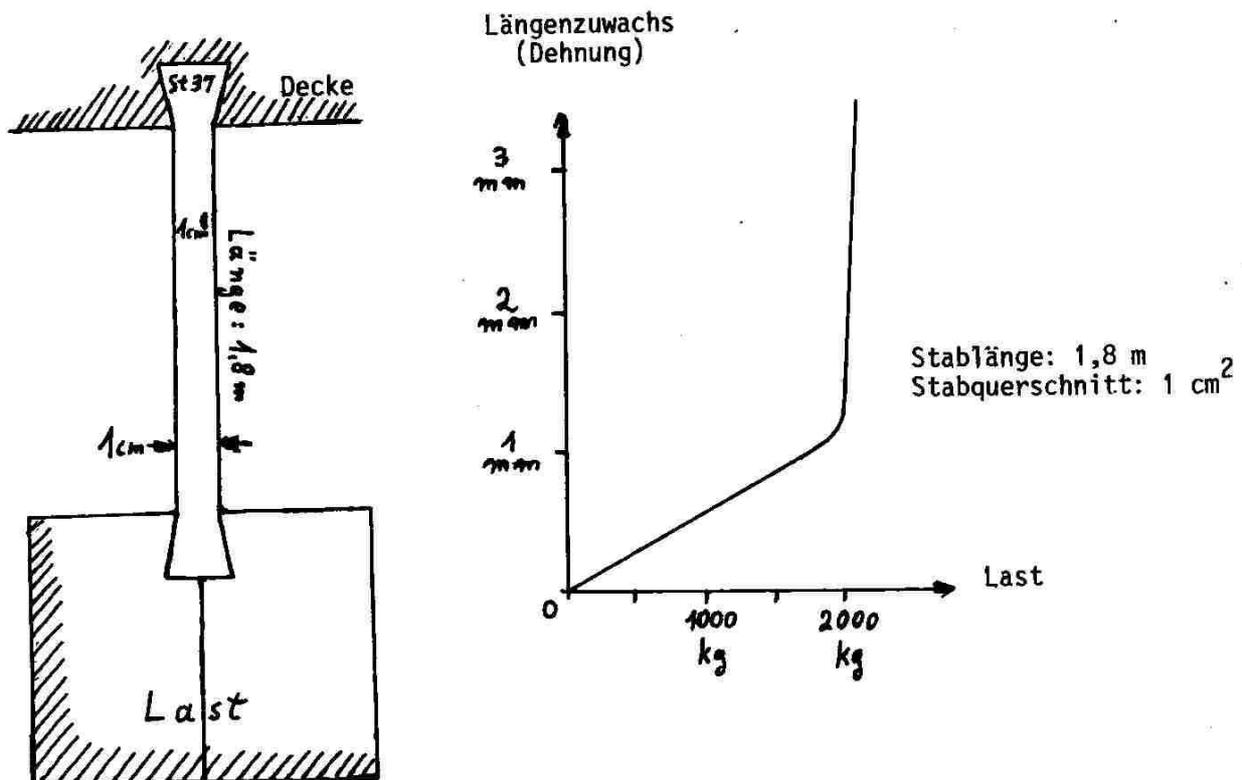
recherche de la résultante par la méthode « du pied-sur-la-tête ». Cette résultante doit être construite entre le pied de la première et la tête de la dernière : or il ne lui reste aucun espace vu que les flèches s'enchaînent sans laisser de vide – la résultante est nulle !

Du fait que nous pourrions faire de même avec toutes les étoiles impaires, celles à sept, ou à neuf, elles donnent toutes, en tant que configurations de forces, l'immobilité.

## Solidité

Nous disposons maintenant de connaissances sur la façon dont des forces diversement agencées peuvent être mises en équilibre afin que rien ne bouge grâce au fait qu'elles se neutralisent. Mais nous n'entendons pas seulement par forces des tendances au déplacement agissant de l'extérieur. Il s'agit aussi de résistances, de tenues de forme issues de l'intérieur, de solidité qui donne réponse à de la contrainte de charge. Nous faisons la distinction entre force active et force réactive. Comment se répartissent les forces réactives qui dans une construction supportent la charge, comment le matériau est-il sollicité, c'est ce à quoi le constructeur ou l'architecte doit réfléchir, ce qu'il doit calculer. Les ponts métalliques, les ponts suspendus, les bâtiments à colombages et les charpentes, tout cela doit se porter et porter une charge utile. Les poutres peuvent supporter de la traction et de la compression, les câbles ne peuvent supporter que de la traction. C'est le contraire pour la pierre, la brique et le béton (de même, pratiquement, que la fonte) : ils ne supportent que très difficilement la traction, mais sont excellents pour la compression.

Comment peut-on mesurer et établir la solidité par exemple de barres de fer ? On se façonne à la lime par exemple la barre d'acier ci-dessous.



Elle est fixée par le haut et tirée par une charge en bas. On ajoute de la charge progressivement pour augmenter le poids et on observe comment la barre s'allonge légèrement sous l'effet du poids. Si on enlève toute la charge, la barre revient à sa longueur d'origine. Si on fait le rapport du poids appliqué à cet allongement élastique, on obtient par exemple la courbe ci-dessus. L'acier utilisé est du ST35 donc du fer à

béton ordinaire. La barre fait 1,80 m et est de section carrée de côté 1 cm soit 1 cm<sup>2</sup>.

Au chapitre « Ressorts », on a déjà mentionné le fait qu'il existe une limite à la charge. Si on outrepassé cette limite, - si l'on suspend un poids trop grand – la barre ne se déchire pas encore, mais elle reste étirée après qu'on a enlevée la charge, elle est définitivement devenue un peu plus longue. Cette limite entre comportement élastique et allongement résiduel, on l'appelle la limite d'élasticité. Pour notre acier ST37, elle est voisine de 2000 kg (voir dessin). À ce stade, elle s'est allongée d'environ 1,2 mm.

Une barre deux fois plus épaisse, dont la section ne serait plus 1 cm<sup>2</sup> mais 4 cm<sup>2</sup>, pourrait naturellement porter une charge 4 fois plus grande avant d'atteindre sa limite d'élasticité. C'est pourquoi la résistance à la traction s'exprime en kg/mm<sup>2</sup> (ou en N/mm<sup>2</sup>). Notre barre aurait une section de 10 mm x 10 mm = 100 mm<sup>2</sup>, les 2000 kg de traction se répartissent donc sur 100 brins de 1 mm<sup>2</sup> de section chacun. Chaque brin supporte donc 2000/100 = 20 kg. Donc, 20 kg/mm<sup>2</sup>, telle est la limite d'élasticité de cet acier.

De la même façon, il nous faut rapporter l'allongement de la barre à la longueur de 1 m. En effet, pour une barre deux fois plus longue, une traction identique donnerait un allongement double. Nous divisons donc les 1,2 mm par 1,8 m et nous obtenons 0,67 mm/m. Ceci représente 0,067 %. L'allongement élastique qui précède le seuil d'élasticité, est donc très modeste.

Si on continue à charger, la barre commence à s'étirer durablement. Et en effet, comme on le voit sur la courbe, la longueur grandit très vite à partir de là. Au voisinage de 37 kg/mm<sup>2</sup> – la limite de rupture – la barre se déchire : d'où sa dénomination St 37. Avant la rupture, elle s'allonge de 22 % de sa longueur. Dans les règles, on ne charge jamais à plus du tiers de la charge de rupture, c'est-à-dire en restant avec un facteur de sécurité de 1,7 dans la plage d'élasticité.

Un fer rond de diamètre 1 cm peut donc être chargé d'environ 5 mm<sup>2</sup> .π. 20 kg/mm<sup>2</sup> = 1570 kg sans étirement résiduel. On peut y suspendre environ 1,5 tonnes. Des fils de traction spéciaux, trempés avant câblage et de qualité ressort, peuvent, assemblés en câbles torsadés de 1 cm de diamètre, porter 10 tonnes.

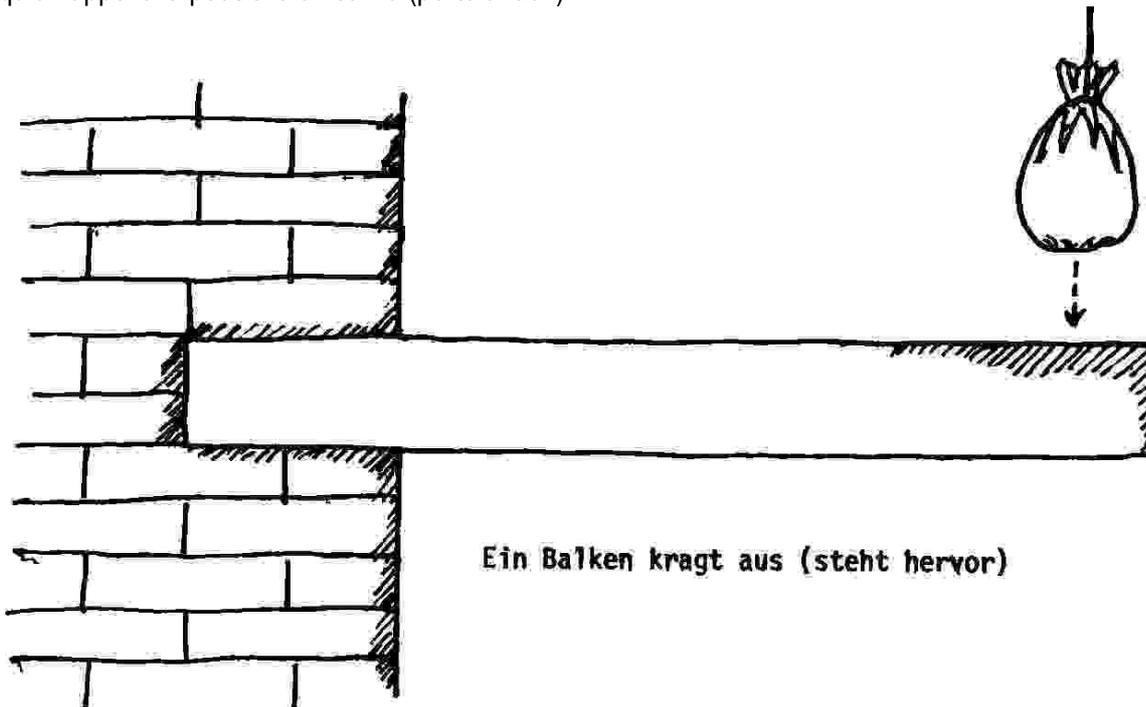
De tels fils d'aciers spéciaux avec des résistance maximales à la rupture de l'ordre de 300 kg/mm<sup>2</sup> sont utilisés pour faire les cordes de piano. Le tableau ci-dessous présente la résistance élastique et la résistance à la rupture de différents matériaux. La résistance à la compression qui est aussi indiquée n'est pas la résistance à la torsion de barres allongées, mais la limite à la déformation élastique et à l'écrasement d'échantillons de forme cubique.

	Seuil d'élasticité de traction	Seuil de compressibilité élastique	Résistance à la rupture	Résistance à l'écrasement
Acier ST 37	20 kg/mm <sup>2</sup>	20	37	37
Acier ST 52	32	32	52	52
Câbles de pont			172	
Fonte d'acier			18	70
Fer doux			25	
Bois résineux (sens des fibres)	2,5	1,7	8	4
Bois feuillus			14	
Béton de haute qualité			0,5	6
Grès				1
Duralumin	24	24	40	40
Aluminium pur			5	
Verre			3,4	15
Caoutchouc	0,2		0,3	
Argent			14	
Or			12	

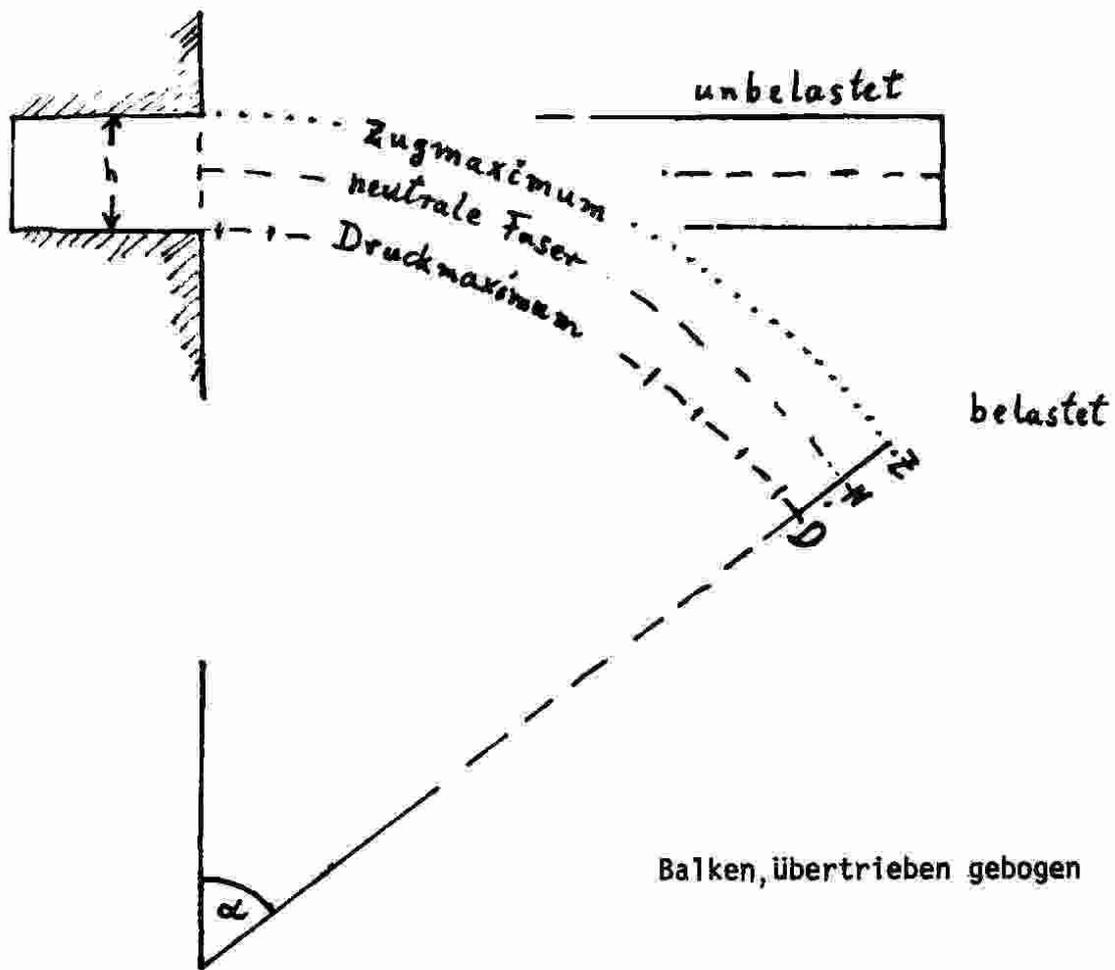
Un câble d'acier, d'une résistance à la rupture de  $300 \text{ kg/mm}^2$  et de masse volumique  $8 \text{ g/cm}^3$ , suspendu verticalement dans un gouffre, romprait sous l'effet de son propre poids à partir d'une longueur de 37 km. Mais auparavant, il se serait peut-être allongé de 6 km sous son poids.

## Les poutrelles

Nous avons jusqu'ici cherché comment on peut suspendre quelque chose à une barre longitudinalement. Mais dans les constructions, on cherche plutôt de quelle façon une charge peut être supportée par un sol horizontal – des poutrelles. Les piliers peuvent par exemple porter des charges qui dépassent latéralement. Mais c'est seulement la capacité à porter « à côté » qui rend possible un bâtiment. La quasi-totalité de la vie humaine se déroule sur des poutrelles, qu'elles soient de bois ou de béton armé. Le cas le plus simple est celui de ce qu'on appelle la poutrelle en saillie (porte à faux) :



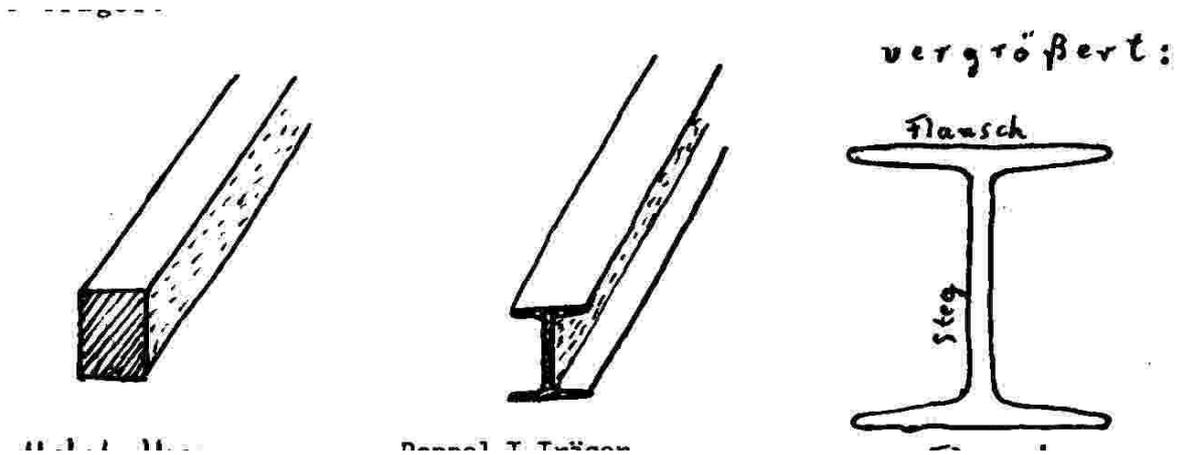
Que va-t-il se passer quand le sac va reposer sur la poutrelle ? La poutrelle va plier vers le bas. À gauche, elle est fermement scellée dans le mur. Si on dépose à droite de plus en plus de poids sur l'extrémité de la poutrelle, elle va finir par se briser, et elle va le faire à gauche, près du mur. C'est manifestement là qu'elle va plier le plus fort. Cependant, pour un raisonnement plus général, nous allons admettre que la poutrelle se déforme en arc de cercle.



Poutrelle fléchissant sous la charge

Soit  $h$  la hauteur de la poutrelle. Nous considérons trois couches : la face supérieure (Z), la couche médiane qui lui est parallèle (N) et la face inférieure (D). Sous la charge, seule la couche médiane N se trouve d'une longueur quasi égale à sa longueur initiale ; Nous faisons abstraction du poids propre de la poutrelle. La face supérieure Z de la poutrelle se trouve étirée en longueur sous l'effet de la courbure (d'une valeur égale à  $\alpha/360 \cdot h \cdot \pi$ ), et la face inférieure par contre se trouve raccourcie d'une longueur équivalente. En voyant la déformation, on peut dire : dans le haut de la poutrelle, il y a de la traction, et dans le bas, de la compression. Au milieu exactement, on a une couche N non déformée ; on l'appelle la « **fibre neutre** ». Tout ceci s'applique également même si la poutrelle ne décrit pas un arc de cercle régulier, et que le rayon de courbure varie. Pour que la fibre neutre se trouve exactement au milieu, il faut que l'élasticité de traction soit identique à la compressibilité élastique, ce qui est le cas pour des courbures faibles.

Le bois n'est donc en son milieu pratiquement pas sollicité. Il l'est de plus en plus à mesure que l'on va vers les faces supérieures et inférieures. C'est en haut et en bas qu'on a les contraintes les plus fortes. Ainsi, en gros, la moitié du bois ne porte rien (ni en traction ni en compression). Aussi grande que soit la charge, c'est comme si seule une moitié de la section du bois était pleinement en tension. Lorsqu'il y a une centaine d'années on s'est mis à utiliser de plus en plus des poutrelles métalliques à la place des poutrelles de bois pour les plafonds des bâtiments industriels et autres, on a délaissé les poutrelles de forme massive : on a éliminé la matière superflue qui porte moins, dans les profils métalliques fabriqués industriellement, et l'on a aminci le milieu. Ainsi apparaît le profil en T :

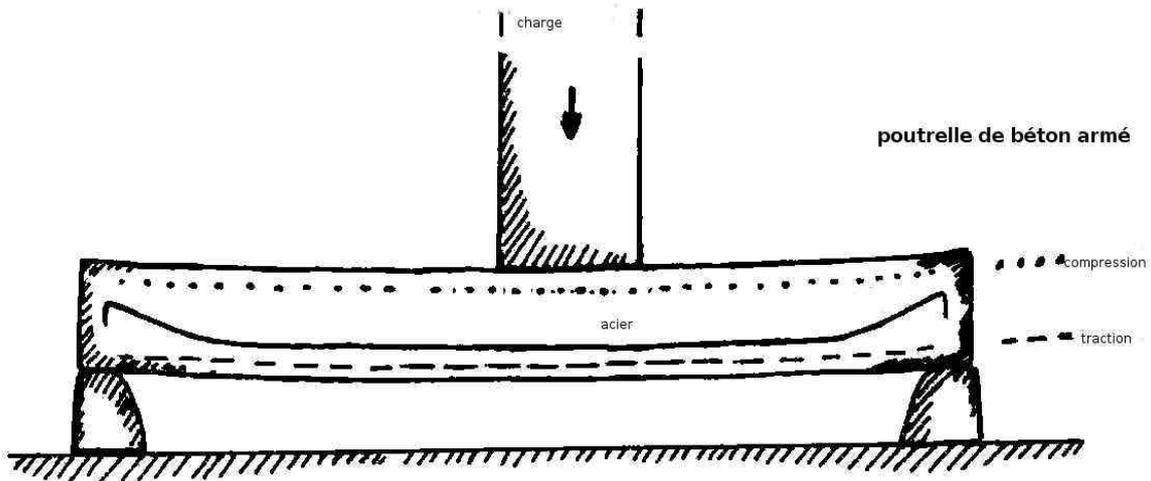


Remarque du traducteur

Le profil de tube, qu'il soit de section ronde, carrée ou rectangulaire, répond au même souci d'allègement et d'économie de matière presque sans perte de charge utile.

La poutrelle en T (plus exactement en double T alias IPN, pour I Profil Normal) va être produite mécaniquement en métallurgie par laminage et étirage jusqu'à des profils de 1 m de haut. On ne pourrait pas fabriquer des choses pareilles avec du bois sans grosses pertes, car les poutres de bois ne peuvent pas être usinées comme cela, on ne peut que les tailler à partir des grumes entières, ce qui fait que l'on reste dans des sections massives rectangulaires. Pour l'acier qui est beaucoup plus cher, mais aussi plus solide et plus lourd, on cherche à économiser le matériau au maximum. Le dessin ci-dessus montre bien le profil en double T. La bride supérieure supporte la traction et la bride inférieure la compression (pour la poutrelle en porte à faux). L'âme au centre n'est pas soumise à de la contrainte longitudinale mais doit supporter une compression perpendiculaire à la poutrelle. En effet, les deux brides « veulent » se rapprocher sous la charge qui fait fléchir et elles tendraient à se coucher l'une sur l'autre. Vu que la bride en traction tend à s'allonger et que la bride en compression tend à se raccourcir, l'âme doit également encaisser des tensions d'arrachement et de repoussement.

Dans le béton armé usuel, qu'on emploie aujourd'hui pour les ponts et tous les gros bâtiments, on utilise le béton pour gérer la compression, mais pour la traction, que le béton ne supporte pas du tout, on incorpore de l'acier sous forme de tringles, de gros câbles ou de treillis soudé. Les poutrelles de béton surmontant les portes et les fenêtres (linteaux), les montées d'escalier, bref, tous les éléments porteurs réalisés en béton doivent être « armés », c'est-à-dire renforcés par des structures d'acier. Sans cela, elles ne pourraient pas supporter des efforts de fléchissement, vu que ceux-ci se traduisent toujours pour moitié par des contraintes en traction. Dans toute construction sérieuse, on ne doit jamais imposer au béton des contraintes de traction. Par mesure de sécurité, elles doivent être pratiquement nulles. C'est pourquoi un linteau de béton doit être armé dans la zone inférieure car c'est là qu'apparaissent les tractions.



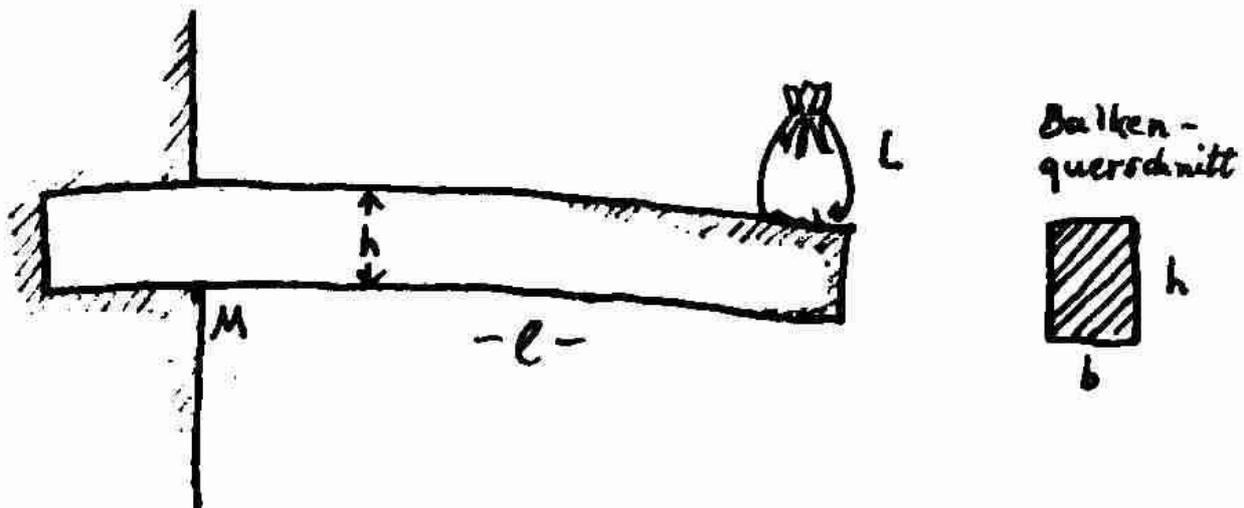
L'armature d'acier, elle, peut supporter la traction et empêcher ainsi la poutrelle de béton de fléchir et de se rompre. L'armature doit être localisée à au moins 2 cm de la face extérieure (de l'air) afin que l'acier soit noyé dans le béton et ainsi protégé de la corrosion.

## Pièces portantes

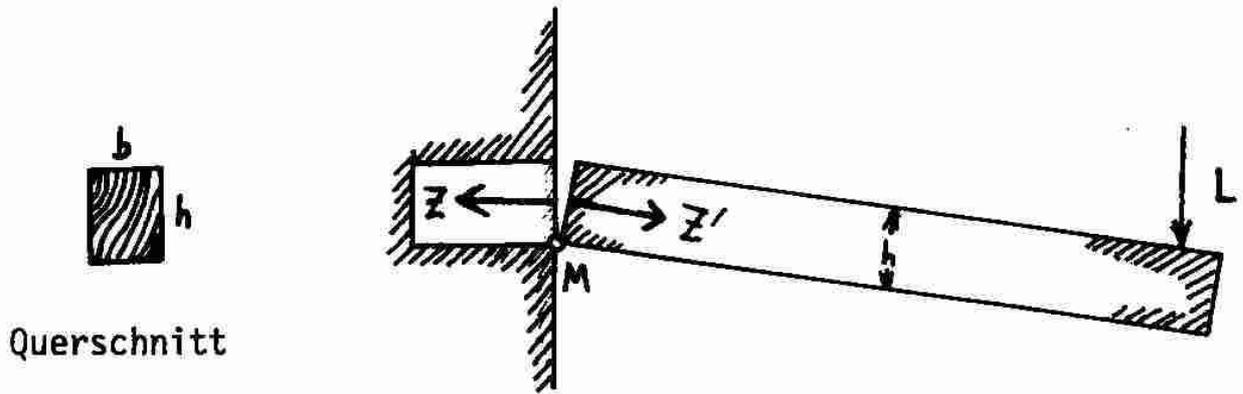
Si l'on sait maintenant comprendre ce qui se passe à l'intérieur d'une poutrelle soumise à une charge fléchissante, on doit pouvoir résoudre la question initiale : quelle charge peut porter une poutrelle en porte à faux d'une section donnée et d'une solidité donnée ? La charge  $L$  est appliquée à l'extrémité de la poutrelle solidement scellée à gauche dans un mur :

Problème du fléchissement

section de la poutrelle

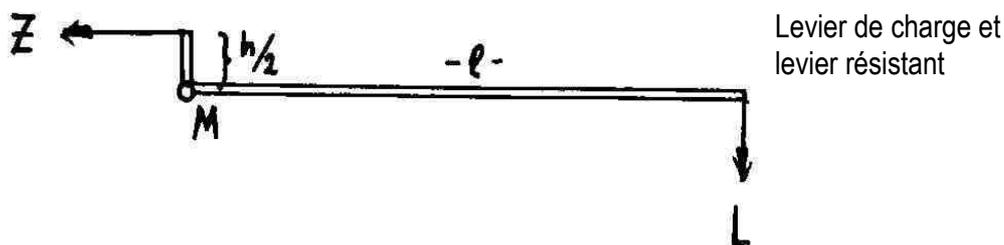


Nous allons tout d'abord radicalement simplifier le problème et admettre, comme l'a fait Galilée quand il s'est penché là-dessus, que la poutrelle s'articule sur le point inférieur  $M$  du mur. On a là un point de rotation (plus exactement un axe de rotation). À droite, le poids  $L$  s'applique avec le bras de levier  $l$  et il « veut » faire basculer vers le bas la partie libre de la poutrelle. Il doit pour cela exercer une traction  $Z'$ . Mais vers la gauche, doit s'exercer une traction  $Z$  de même intensité pour que la poutrelle reste immobile. Sans cela, elle bascule sur le point d'appui, se brise et dégingole.



section

Cette force à gauche est une traction exercée au bout d'un petit bras de levier. (Nous renonçons pour l'instant à prendre en compte la force de compression que nous avons déjà vue). Cette force de traction que nous prenons isolément est uniformément répartie sur toute la section de la poutrelle (hypothèse à revoir ultérieurement), elle s'applique donc au centre de la poutrelle. On peut se représenter que sa résultante a pour bras de levier  $h/2$  :



Il s'agit ici d'un levier coudé (levier balançoire). À l'équilibre, on doit avoir

$$Z \cdot h/2 = L \cdot l$$

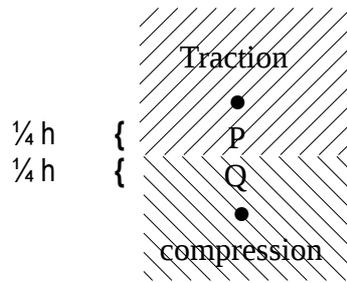
La traction maximale  $z$  pour le bois (par exemple  $4 \text{ kg/mm}^2$ ) multipliée par la surface de section de la poutrelle ( $b \cdot h$ ) en  $\text{mm}^2$  donne la traction maximale  $Z$  que l'on peut appliquer au bras de levier  $h/2$  :  $Z = z$  multiplié par la section, soit  $Z = z \cdot h \cdot b$

Ainsi on obtient l'équilibre avec une charge maximale  $L$  supportée par la poutrelle :

$Z \cdot h/2 = L \cdot l$  soit en remplaçant :  $z \cdot h \cdot b \cdot h/2 = L \cdot l$  c'est-à-dire

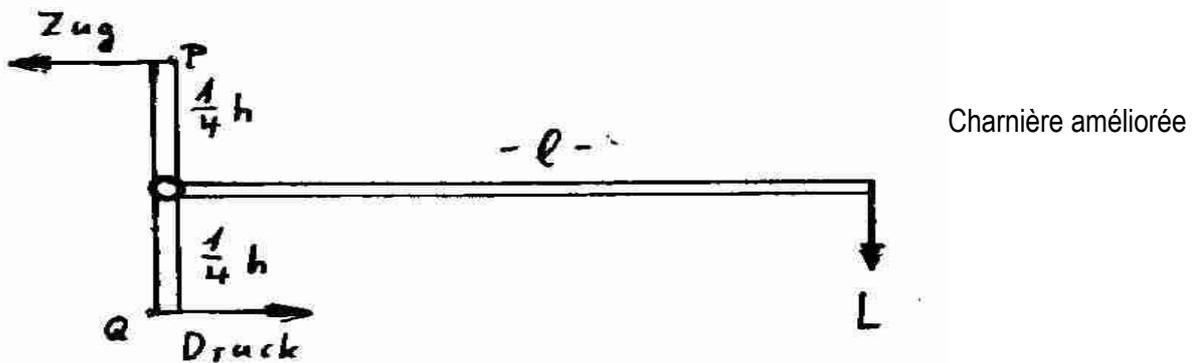
$$L = z \cdot b \cdot h^2 / (2 \cdot l)$$

Cette formule donne par le calcul la charge maximale d'une poutrelle en porte à faux. Or au test expérimental, les poutrelles se brisent déjà à environ un tiers de cette valeur calculée. Cela résulte des simplifications que nous avons faites. En effet il n'y a en réalité pas d'axe de rotation au point  $M$  sur le coin du mur. La résistance à la compression que l'on a considérée assumée par la charnière doit en fait être fournie par le matériau de la poutrelle ! Le point de rotation (l'axe) se trouve en réalité au milieu de la section de la poutrelle et il n'y a que la moitié supérieure qui est en traction. La moitié inférieure est en compression. La résistance à la traction n'est donc que la moitié de ce que nous avons pris.



Coupe au niveau du mur

Faisons à nouveau une simplification : La traction, comme la compression, doit être répartie uniformément sur toute la longueur de la poutrelle. On peut donc placer la résultante des tractions en P et celle des compressions en Q (voir chapitre voisin). Le point d'application de la traction est à  $1/4$  de  $h$  de la charnière. On obtient alors le levier suivant :



Le moment de levier de la charge ( $L \cdot l$ ) est maintenant équilibré par deux petits leviers (leviers balançoire), en l'occurrence traction fois  $h/4$  et compression fois  $h/4$ . P serait alors le point d'application des tractions et Q celui des compressions. Admettons que la résistance maximale du bois a même valeur pour la traction et pour la compression, cela fait que la loi des leviers donne pour l'équilibre de la charge maximale :

bras de levier x traction + bras de levier x compression = distance de charge x charge

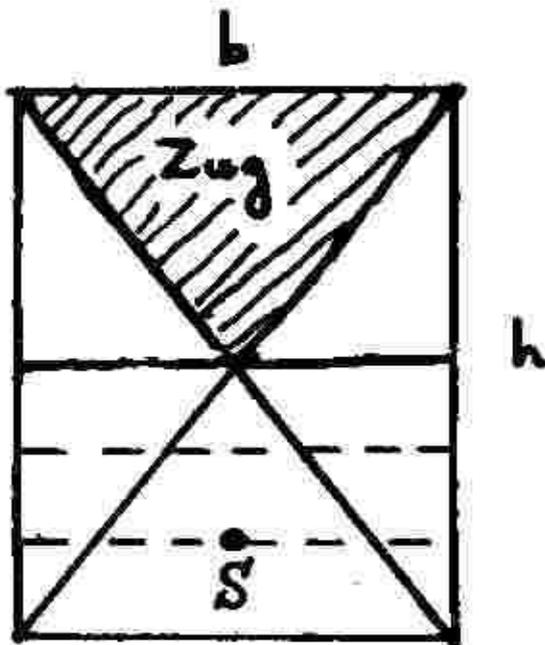
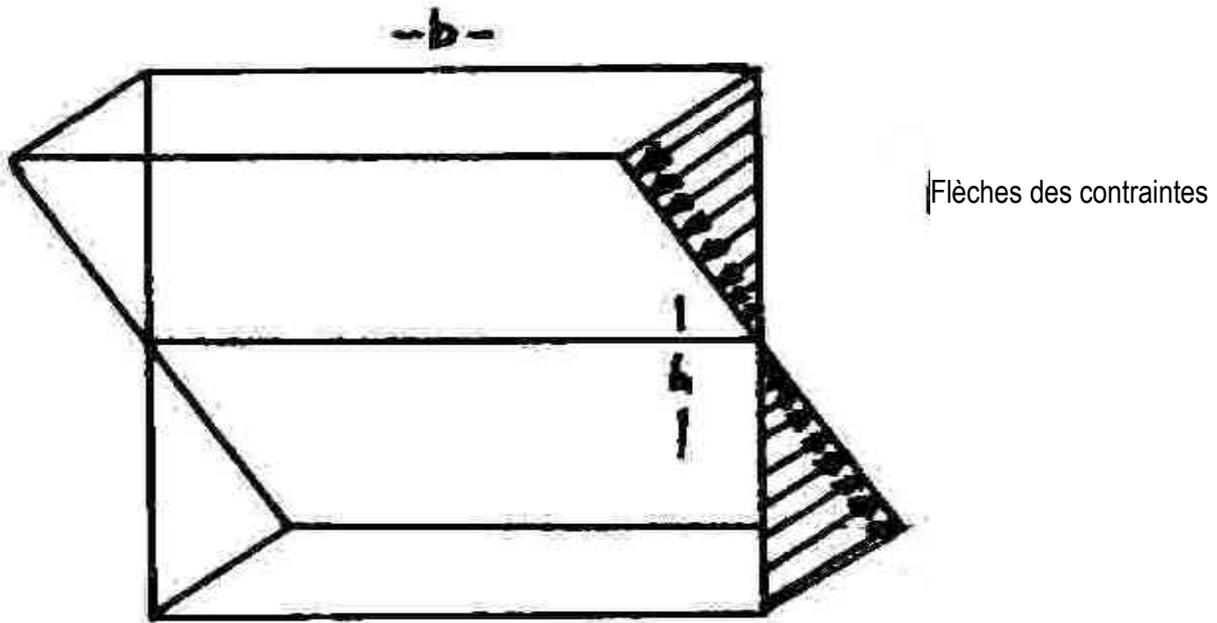
$$h/4 \cdot (b \cdot h/2 \cdot z) + h/4 \cdot (b \cdot h/2 \cdot z) = l \cdot L$$

ce qui donne

$$L = z \cdot b \cdot h^2 / (4 \cdot l)$$

Ce qu'on obtient là est maintenant la moitié de ce qu'on avait obtenu précédemment et qui était manifestement trois fois trop grand. Donc ce résultat de calcul est encore trop élevé. Il nous aurait fallu obtenir un tiers du premier résultat. On peut le comprendre car nous avons encore triché vis-à-vis de ce que l'on sait du comportement d'une poutrelle en fléchissement. La traction et la compression, comme on peut le voir du dehors d'après les déformations différenciées d'étirement et de contraction, ne sévissent pas de façon homogène dans l'ensemble de la section de la poutrelle. C'est en haut et en bas qu'elles sont respectivement maximales et elles sont inexistantes au milieu. (voir chapitre précédent).

## Profil des contraintes



Redessinons la section de la poutrelle (hauteur  $h$  et largeur  $b$ ). Nous pouvons dessiner les contraintes comme des flèches allant du bord vers le centre. Il s'agit de contraintes considérées comme identiques dans chaque plan à toutes les hauteurs de la section. Nous pouvons théoriquement remplacer cela par une surface dont la largeur diminue dans la même mesure que la contrainte. C'est donc la partie hachurée de la section qui est sous pleine contrainte, et tout le reste est hors contrainte. Ceci nous donne à peu près la moitié de ce que donnait notre calcul précédent, en effet la surface du triangle est  $F = b \cdot (h/2)/2$  soit  $F = b \cdot h/4$ . Nous recalculons la traction maximale  $Z = z \cdot b \cdot h/4$  et la compression maximale  $D$  vaut également  $D = z \cdot b \cdot h/4$ .

Il faut maintenant mettre en formule ces deux leviers coudés qui mettent la charge en équilibre. Le centre de la traction, le point où on peut penser qu'elle se concentre, est comme pour la force de poids, le centre de gravité. Dans un triangle, le centre de gravité est toujours situé au tiers de la hauteur (point  $S$  du dessin précédent). Ainsi, le bras de levier de la force  $z$  est exactement les deux tiers de la demi-hauteur  $h$ , c'est-à-dire  $h/3$ . Les leviers ont donc les grandeurs suivantes dans le cas de l'équilibre à charge maximum :

$$L \cdot l = z \cdot (b \cdot h)/4 \cdot h/3 + z \cdot (b \cdot h)/4 \cdot h/3$$

Et le résultat est que la charge maximale de la poutrelle en porte à faux est :

$$L = z \cdot b \cdot h^2 / (6 \cdot l)$$

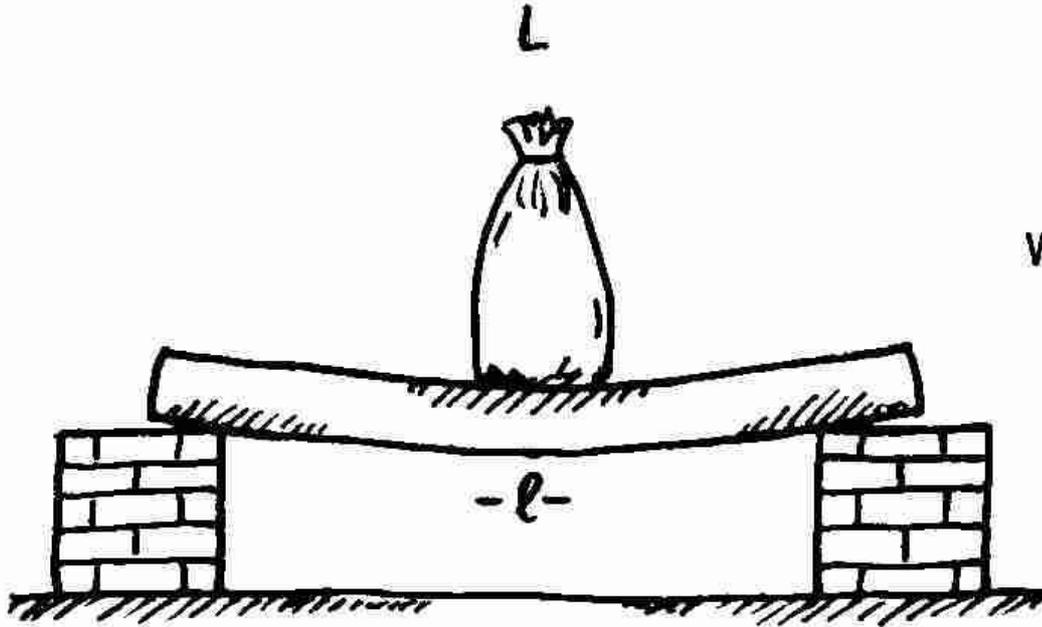
Et là, nous avons atteint la formule juste. À une poutrelle verticale de section 10 cm x 10 cm et de résistance à la traction  $z = 4 \text{ kg/mm}^2$ , on peut accrocher une charge maximum de  $100 \cdot 100 \cdot 4 = 40$  tonnes.

Combien une telle poutre peut-elle supporter si elle est en porte à faux de 2 m horizontalement ?

$$L = 4 \text{ kg/mm}^2 \cdot (100 \text{ mm} \cdot 100 \text{ mm}) / (6 \cdot 2000 \text{ mm}) = 0,33 \text{ tonnes}$$

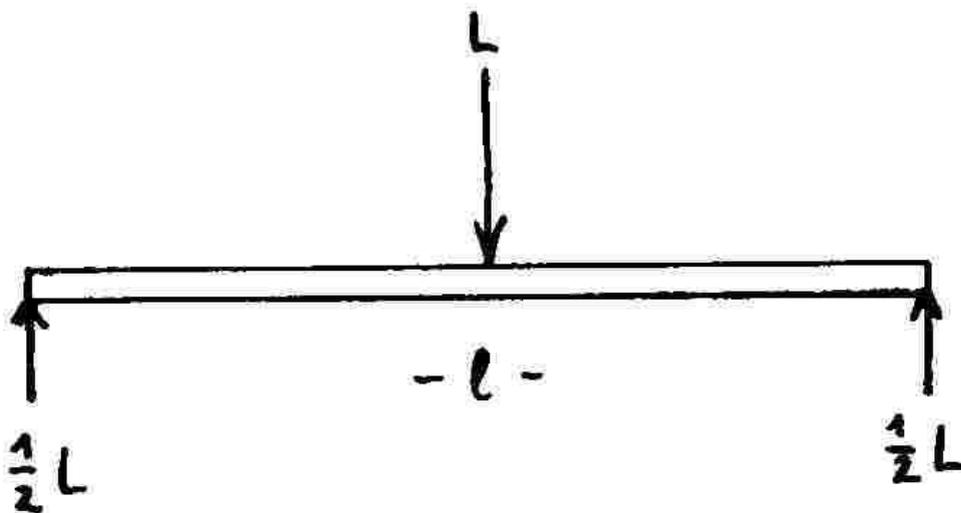
Suspendue, la poutrelle peut supporter en traction plus de 100 fois plus qu'en flexion pour une portée libre de 2 m ! (le facteur exact est  $h/(6 \cdot l)$ ).

Combien peut maintenant porter une poutrelle en linteau sur deux piliers ?



### Poutrelle en linteau

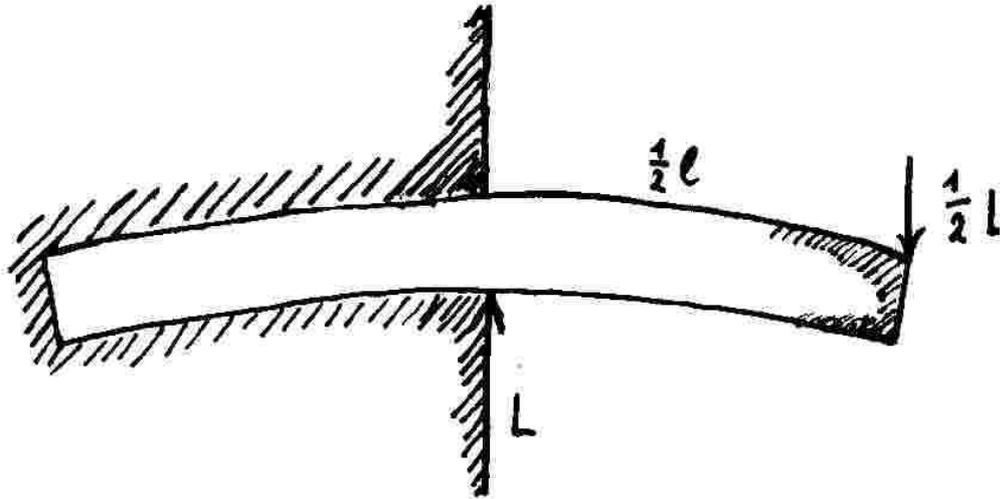
Le fléchissement maximum se situe au centre. L'expérience montre que c'est là que le linteau se brise. Au milieu, la courbure venant de la gauche (moment de rotation) se fait équilibrer par celle qui vient de la droite. Si nous négligeons le poids de la poutrelle, chacun des deux socles de maçonnerie pousse avec une force égale à la moitié du poids de la charge soit  $L/2$ .



Forces agissant sur le linteau

Vu que pour une poutrelle de bois, il est indifférent de subir une contrainte en flexion vers le haut ou vers le

bas, nous pouvons retourner tout le dispositif. C'est alors que nous allons noyer dans le béton la moitié de la poutrelle fléchie.



Poutrelle en porte à faux

On voit qu'on retrouve alors la situation bien connue de la poutrelle en porte à faux.

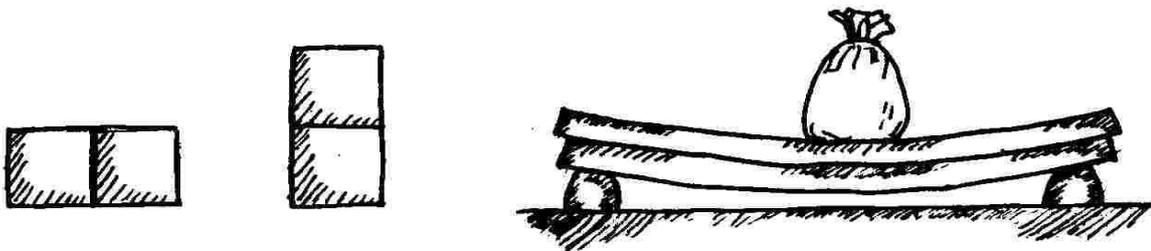
$$L/2 = z \cdot b \cdot h^2 / (6 \cdot l/2)$$

Le linteau posé sur ses deux points d'appui peut donc porter en son centre

$$L = 4 \cdot z \cdot b \cdot h^2 / (6 \cdot l)$$

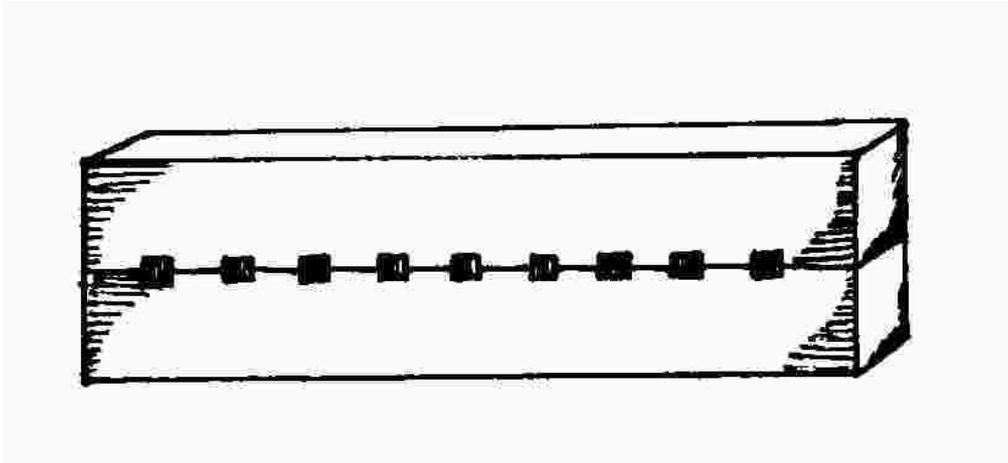
C'est autant que deux poutrelles en porte à faux qui de droite et de gauche sortiraient de deux piliers au même écartement, mais seraient solidement scellées dans la maçonnerie. Si la poutrelle unique se trouvait scellée des deux côtés, elle porterait alors le double de ce que porte le linteau posé librement.

Deux poutrelles posées côte à côte portent naturellement deux fois plus qu'une seule. Et de même si on les superpose :



Juxtaposition et superposition de poutrelles

Les deux poutrelles superposées se répartissent la charge car se contraignant l'une l'autre par leur position, elles sont obligées de fléchir de la même façon, ce qui indique bien qu'elles portent la même charge. Mais ce faisant, elles se décalent un peu l'une sur l'autre dans la longueur : celle du dessus dépasse un peu aux extrémités tant que l'ensemble reste en flexion. La face inférieure de la poutrelle supérieure est naturellement étirée et sa face supérieure est comprimée. Elles réagissent donc comme des poutrelles isolées juxtaposées. Or la charge utile devient toute autre si on les colle et les cheville dans la longueur en en faisant une poutrelle unique de section double.



Poutrelles chevillées

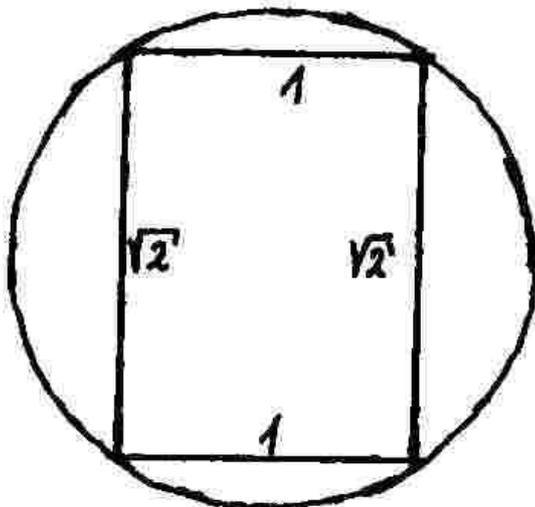
Elles pourraient alors porter quatre fois plus qu'une poutrelle unique, vu que dans la formule,  $h$  est élevé au carré. D'une façon générale, la charge utile de poutres de section carrée est proportionnelle à la largeur  $b$  et au carré de la hauteur  $h$ , mais inversement proportionnelle à la longueur  $l$  ; cela signifie qu'une poutre de largeur double portera le double ; si c'est la hauteur qui est double, elle portera quatre fois plus. Et quand on double la longueur, la charge utile diminue de moitié. Tout ceci se lit dans la formule  $L = z/6 \cdot B \cdot h^2 / l$

Une poutre de section carrée de 20 cm de côté ne porte que la moitié de ce que porte une poutre de section rectangulaire de 10 cm sur 40 cm de hauteur.

C'est pour cela qu'on emploie des poutres de section rectangulaire et non pas carrée, et qu'on les pose sur champ, c'est-à-dire qu'on leur donne un profil allongé. Le plus économique en poids et en bois serait d'utiliser des planches posées sur champ. Pourtant, les poutres ne doivent pas devenir trop minces sans quoi elles pourraient se vriller sous la charge, tourner et basculer. On aurait donc besoin de calages protecteurs sur les côtés.

Dans la pratique, on ajoute à notre formule, et ça se confirme à l'expérience, qu'une barre de section 2 cm x 2 cm ne porte pas quatre fois plus mais huit fois plus qu'une barre de section 1 cm x 1 cm. Pour les sections carrées, ce n'est donc pas l'élévation au carré mais l'élévation au cube qui détermine la charge utile ( $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ ).

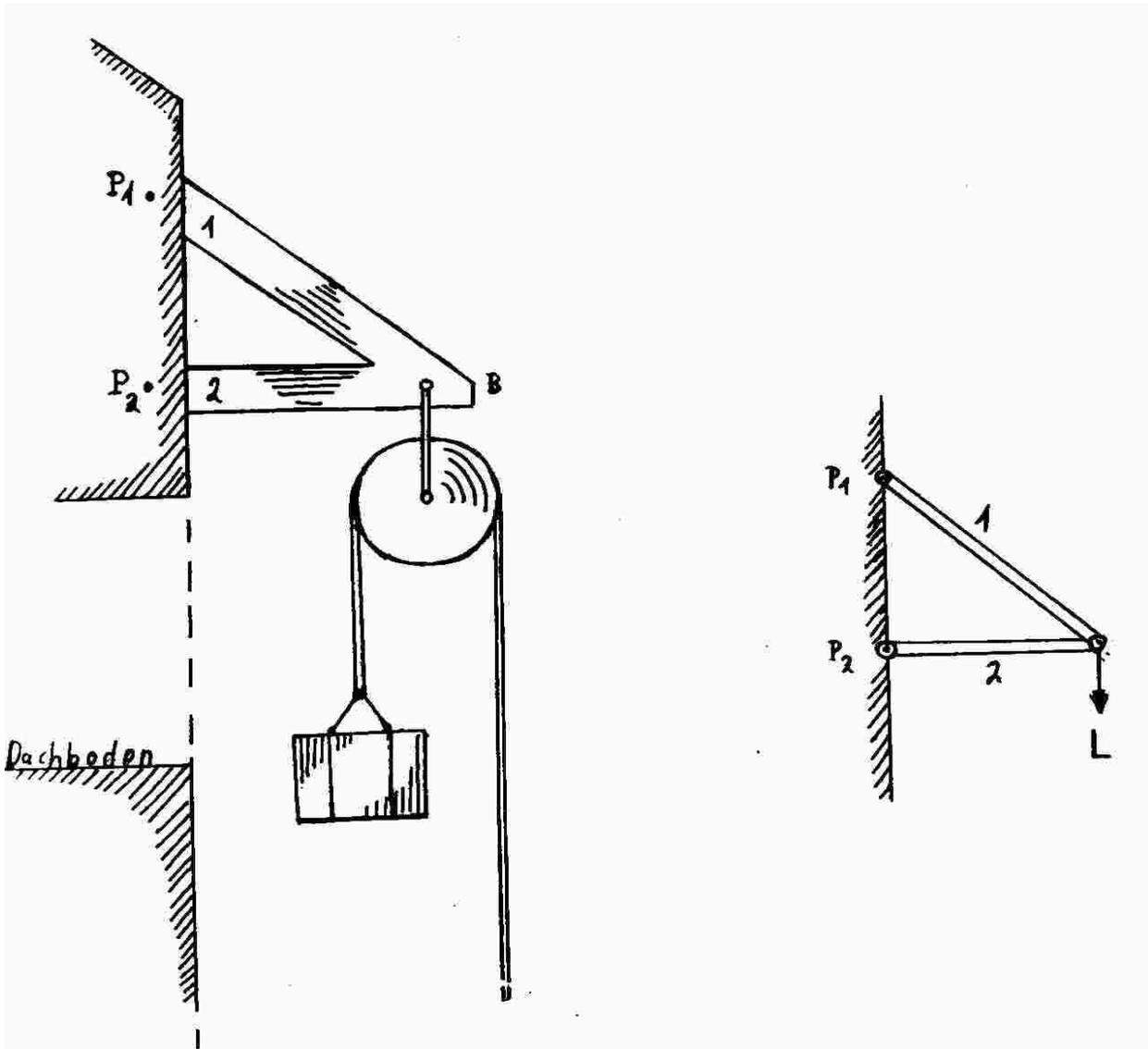
Si l'on veut tirer d'une grume ronde une poutre de section rectangulaire dont la charge utile serait la plus élevée possible, il faut la scier dans un profil de rapport 1 sur 1,4 (plus exactement 1 sur racine de 2), ce qui équivaut à peu près au rapport 5 sur 7 ; un profil carré aurait une charge utile moins avantageuse.



Poutre porteuse, optimisée à partir du sciage d'une grume cylindrique

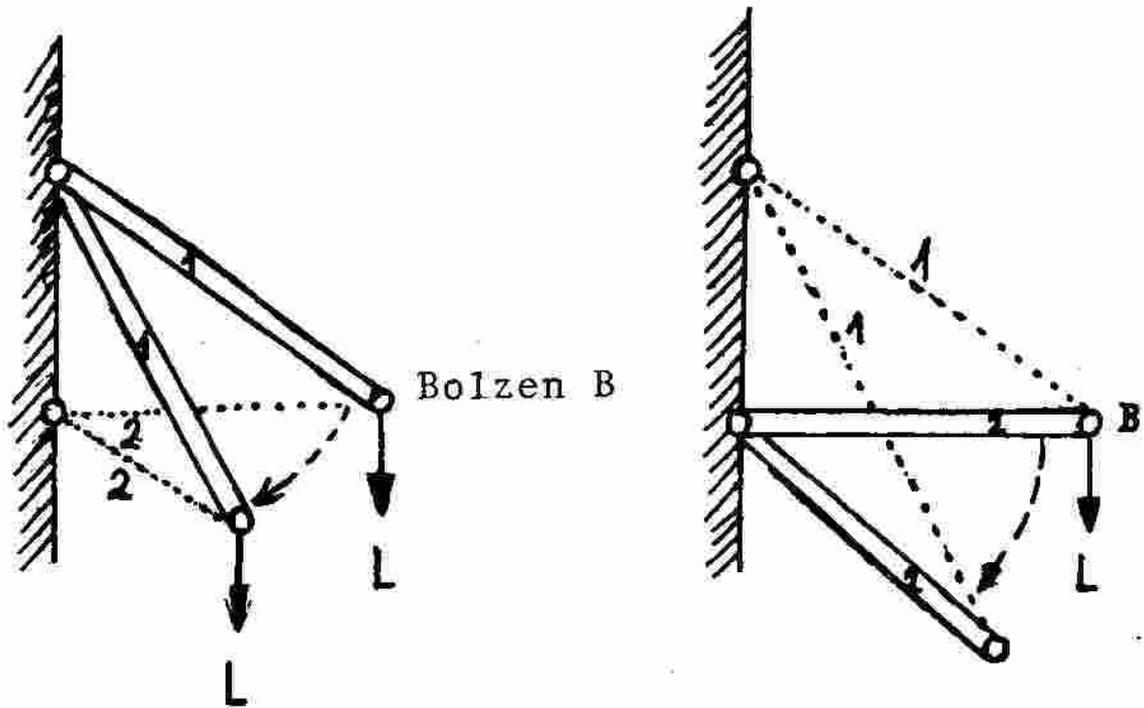
## Potences

Nous avons découvert que les barres résistent au mieux lorsqu'elles sont sollicitées en traction (ou en compression) longitudinalement. Elles résistent beaucoup moins bien à la flexion. Pour les surfaces portantes non étayées que l'on souhaite réaliser dans presque tous les ouvrages de construction (planchers, couvertures, ponts), on va essayer par des astuces et des structures de charpente, que la charge, du fait de tractions et de compressions, ne donne pas lieu à du fléchissement. Un exemple simple en est donné par la potence suivante, du genre de celles qu'on voit encore de nos jours subsister aux pignons des maisons et qui permettent de monter des charges dans les greniers.



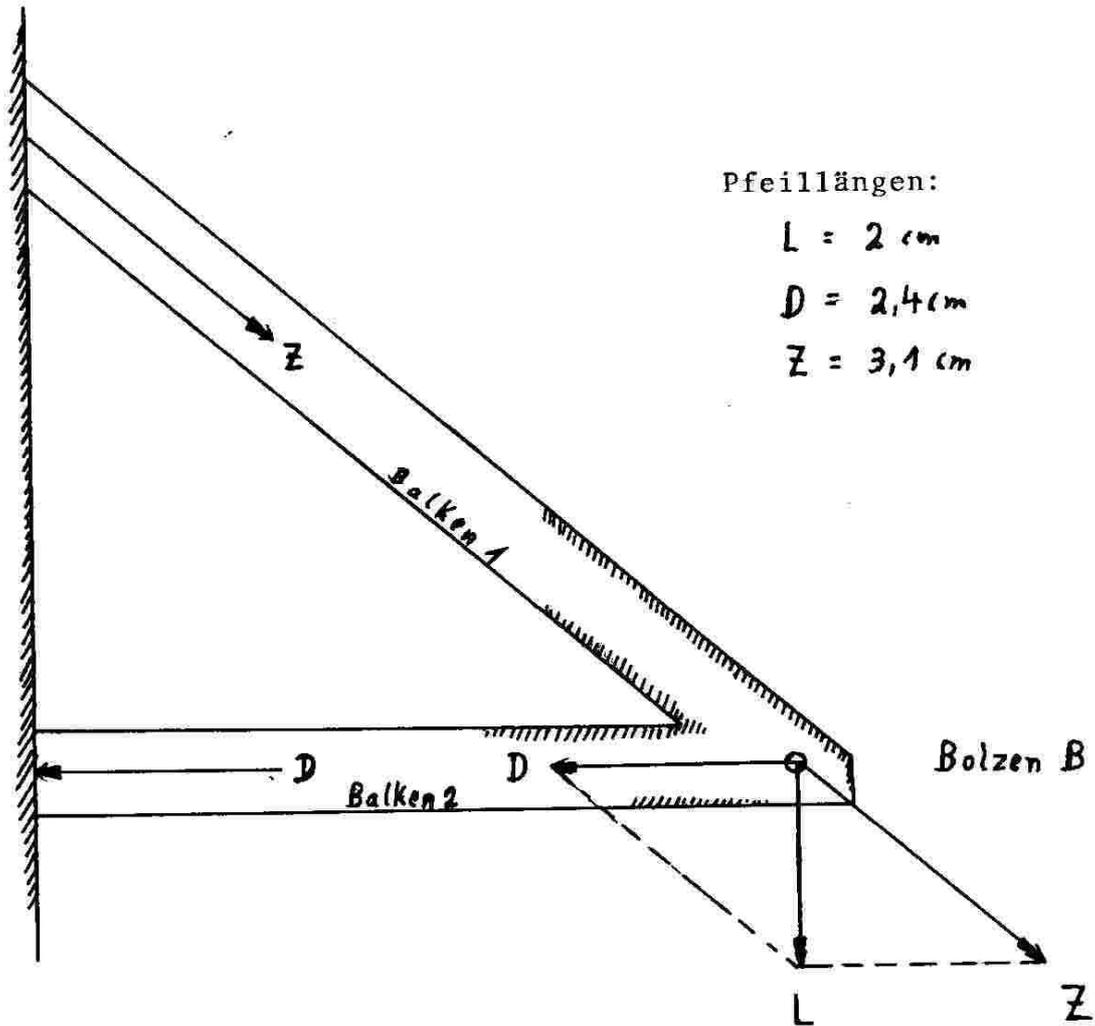
Pour soutenir la petite potence par des forces de traction et de compressions, considérons tout d'abord que la poutre 1 peut librement tourner autour du point  $P_1$ , et de même la poutre 2 autour du point  $P_2$ ; et que le boulon B de suspension de la poulie constitue une charnière identique sur les deux poutres. Dans ces hypothèses s'exprime l'idée que seules vont s'exercer la traction et la compression, et qu'en aucun cas on aura de la flexion. Cela nous donne la structure dessinée en haut à droite.

Si l'on enlève la poutre 2, la poutre 1 va, sous l'effet de la charge, effectuer le mouvement suivant :



L'espace qu'occupait auparavant la poutre 2 est ainsi ratatiné. C'est donc que la poutre 2 portait une charge en compression, puisqu'elle empêchait ce mouvement. On peut aussi se représenter que la poutre 2 par exemple serait remplacée par une poutre en pâte. Une poutre en pâte peut, sous une charge, soit s'étirer en longueur, soit se faire compacter en boule. Tout cela vaut aussi pour la poutre 1 (dessin de droite) qui serait ici étirée, et se trouve donc en charge de traction. Quel est maintenant l'ordre de grandeur de ces forces que sous la charge, le boulons B fait subir aux deux poutres ?

Nous traçons l'angle B et dessinons la charge L selon une échelle de notre choix. Elle tire le boulon vers le bas. Le boulon tire sur une poutre et pousse sur l'autre. Toute la force doit se répartir entre les deux. Il n'y a aucun autre objet qui pourrait exercer une force au point B. Il nous faut donc décomposer la force L dans les directions des poutres – c'est tout simple avec le parallélogramme :



Nous obtenons les forces D et Z. Le boulon tire donc avec Z et pousse avec D. La force Z part à droite vers le bas dans le vide, c'est-à-dire qu'elle ne fait que tirer en partant de la poutre 1, car aucun objet soumis à de la compression ne se trouve à droite en dessous. La force D entre dans la poutre 2, et la soumet à la compression. Les poutres transmettent ces forces au mur, là où elles sont scellées ; c'est là que finalement doivent répondre des contre-forces de même intensité. Si les poutres étaient fixées au mur tout en étant capables de rotation, on pourrait ressentir là cette traction et cette compression.

Nous glissons brièvement le calcul de Z et D par l'équation utilisant l'échelle choisie pour L.

Exemple ; soit  $L = 100 \text{ kg}$ , et l'échelle 100 kg pour 2 cm

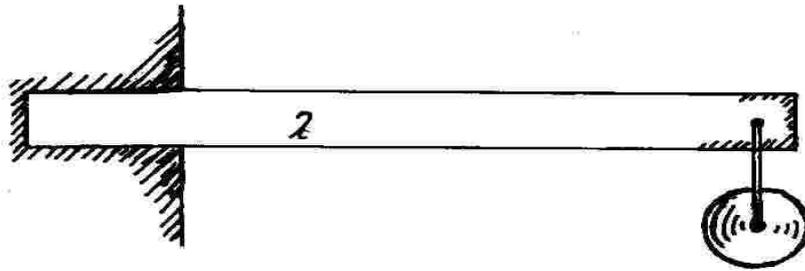
On trouve sur le dessin :  $Z = 3,1 \text{ cm}$  2 cm représente 100 kg donc 1 cm représente  $100/2 \text{ kg}$

$3,1 \text{ cm}$  représente  $3,1 \cdot 100/2 \text{ kg}$

$Z = 155 \text{ kg}$  et pour D, le même calcul donne  $D = 117 \text{ kg}$

L'échelle au moyen de laquelle nous avons graphiquement représentée la charge L nous permet d'obtenir par le biais du tracé, la valeur des autres forces. Dans notre cas, nous obtenons pour une charge de 100 kg, une sollicitation en traction de 155 kg environ dans la poutre 1 et de 117 kg environ en compression dans la poutre 2. La traction est donc la plus forte. Ces deux contraintes, en faisant abstraction du poids propre des poutres, sont par ailleurs indépendantes de la dimension de la potence et de la longueur des poutres, pour peu que l'on garde l'angle  $\alpha$  ainsi que la charge L.

Comparons ce mode de construction de potence avec une simple poutre en porte-à-faux.



Pour cela, nous éliminons la poutre 1 et nous scellons solidement la poutre 2.

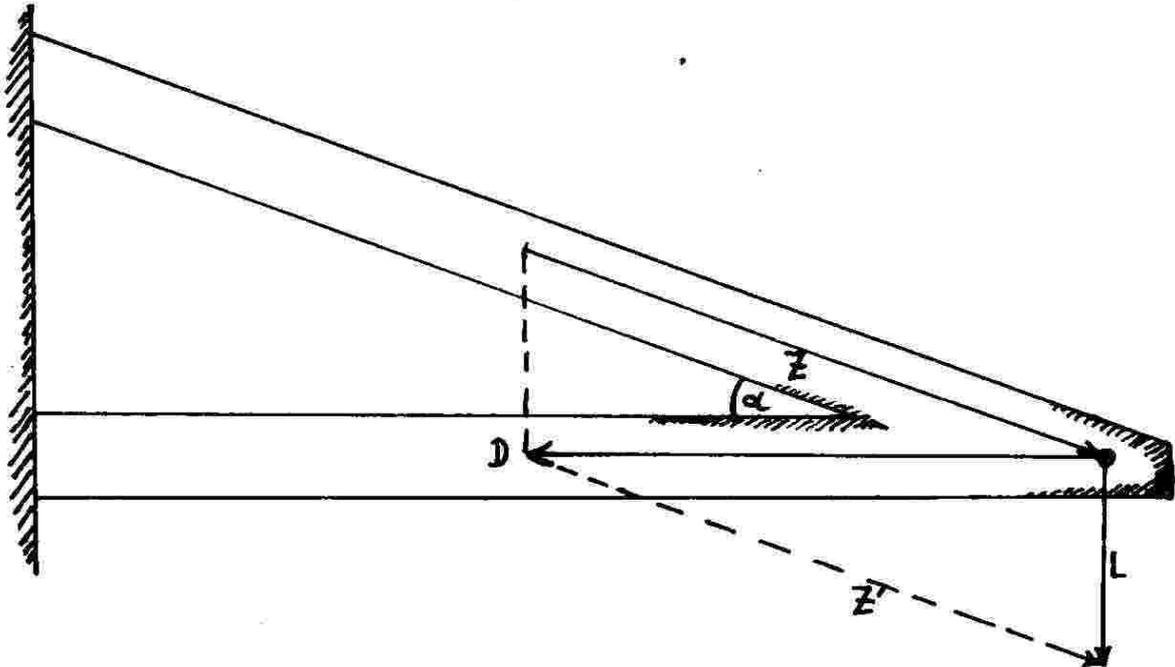
Prenons une poutre de section carrée 10 x 10 et un porte-à-faux de longueur 2 m. La potence étudiée précédemment, faite de deux poutres, crée dans la poutre oblique une traction que nous rapportons au  $\text{mm}^2$  et nous obtenons  $z = 155 / 100 \cdot 100 = 0,015 \text{ kg/mm}^2$

La poutre en porte-à-faux aurait, elle, sur sa face supérieure, à subir une traction maximale de :

$$z = (6 \cdot l \cdot L) / (b \cdot h^2) = (6 \cdot 2000 \cdot 100) / (100 \cdot 100 \cdot 100) = 1,2 \text{ kg/mm}^2$$

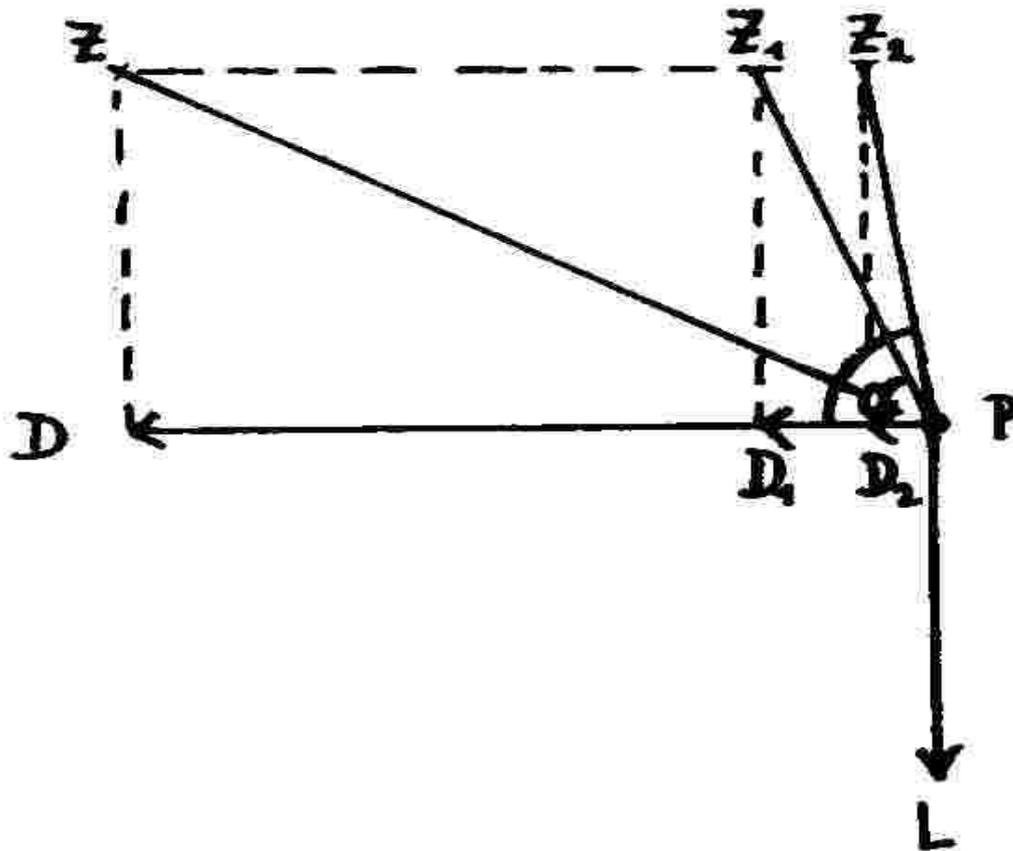
La potence construite sollicite donc le bois, pour un déport de 2 m, environ cent fois moins que la poutre simple, qui est donc 100 fois moins intéressante ! Si l'on se dit que la potence construite nécessite deux poutres de 2 m et 3 m, au lieu de seulement une de 2 m, il faut bien reconnaître que le surcroît de consommation de bois (5 m au lieu de 2) est peu de chose devant le gain en charge utile !

Moins la poutre supérieure est inclinée et donc moins elle est longue, plus elle sera sollicitée, de même que la poutre inférieure – la charge utile de la potence décroît. Décomposons cette charge  $L$  de l'exemple ci-dessus, mais en utilisant cette fois la règle du pied-sur-la-tête :



La décomposition de la force donne avec ce petit angle  $\alpha$  entre les deux directions, des flèches de traction et de compression très longues.

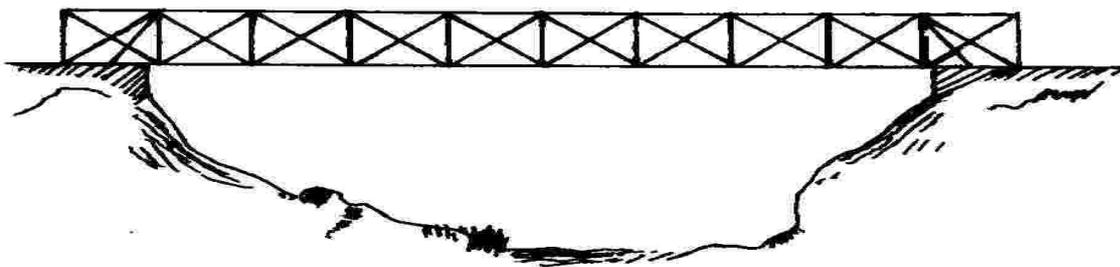
Si, à l'inverse, on prend un angle  $\alpha$  qui s'approche pas à pas de  $90^\circ$ , la traction dans la poutre supérieure diminue jusqu'à égaler la valeur de  $L$  ; et la compression dans la poutre inférieure s'approche progressivement de zéro.



Dans les structures de construction, on va donc chercher à configurer pour que les barres se rapprochent aussi près que possible de la charge, c'est-à-dire à rapprocher au maximum la direction des barres de la direction de la charge, afin que celle-ci, du fait d'angles très faibles, ne puisse que très peu solliciter les barres en traction et en compression ; C'est ce principe qui explique les mâts de charge de grande hauteur sur les bateaux.

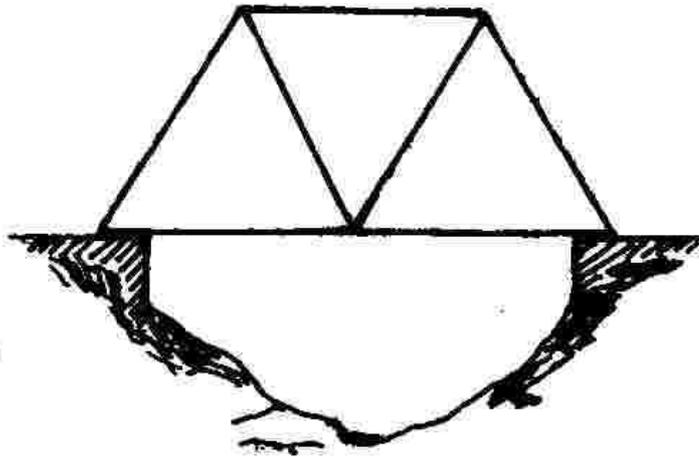
## Ponts

Le pont le plus simple, c'est une poutre posée au-dessus d'un ruisseau. Nous avons calculé précédemment que ça ne peut pas porter beaucoup, surtout si la longueur est importante. Avec des poutres très hautes (de très fortes sections) la charge utile s'améliore. On pourrait donc coller ensemble des poutres jusqu'à une hauteur de 2 m, puis enlever ensuite toute la matière superflue – comme dans les IPN. On laisserait sur le dessus et sur le dessous deux couches massives, et entre les deux, ce serait ajouré. On obtient ainsi le principe du pont de poutres triangulées.



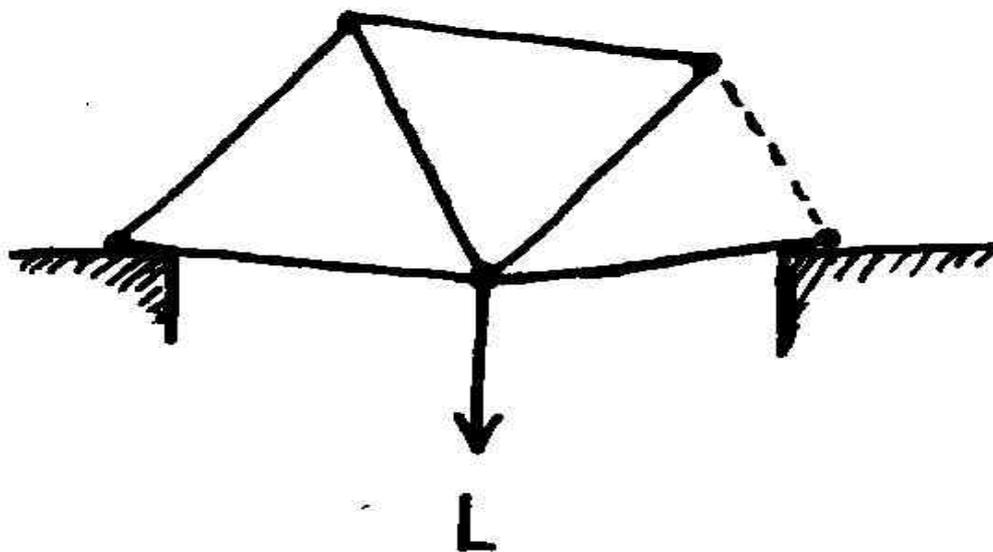
Cela fait très longtemps qu'on construit des ponts de ce genre. Recherchons sur un exemple simplifié quelles

sont les poutres en traction et quelles sont les poutres en compression.

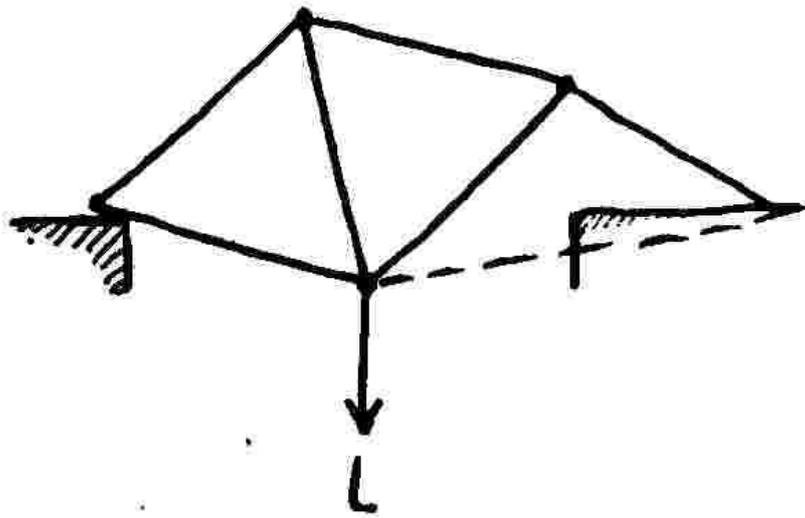


Imaginons un pont fait de trois triangles égaux. Les poutres ne doivent subir que de la traction ou de la compression et jamais de la flexion. Il faut donc les envisager comme si elles pouvaient tourner sur leurs points d'assemblage. Nous plaçons une charge au milieu du tablier du pont. Si la charge était placée ailleurs qu'au milieu, le tablier serait naturellement aussi contraint en fléchissement et il faudrait le renforcer ; laissons cela de côté pour le moment.

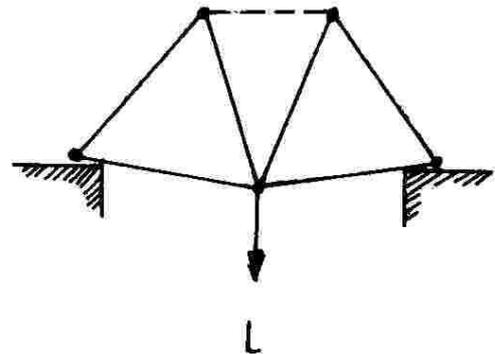
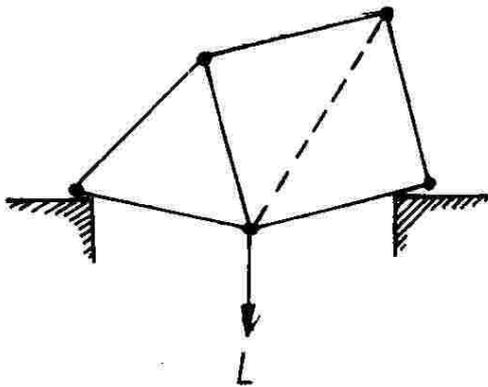
Ce qui nous intéresse tout d'abord, c'est de savoir quelles sont les poutres en traction et quelles sont les poutres en compression. Enlevons tout d'abord par exemple la poutre de droite et chargeons.



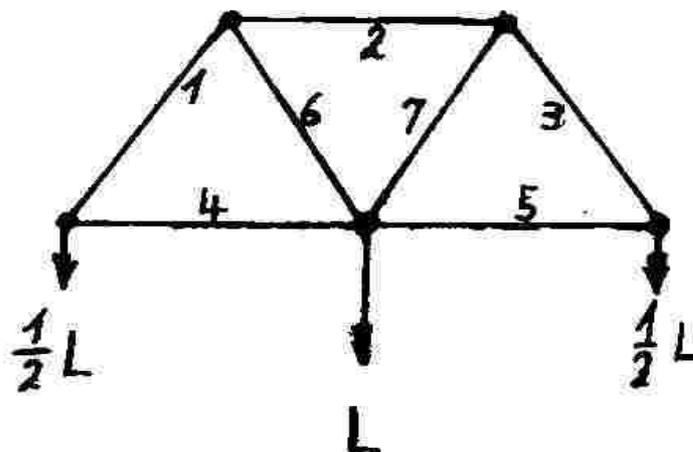
Le tablier plie en son milieu, la partie de droite pivote sur l'articulation du centre du tablier. Le pont se tord et se brise. L'espace de la poutre manquante (en pointillé) se fait compresser : elle était donc en **compression**. Enlevons maintenant une autre poutre.



Cette direction (pointillée) se fait allonger, la poutre était donc sollicitée en **traction**. Une troisième se révèle de même en traction (dessin de gauche) et une autre en compression (dessin de droite)



Les poutrelles supérieures du pont (1, 2 et 3) sont donc toutes sollicitées en compression et les poutrelles du bas et les deux tirants (4 à 7) sont, pour une charge placée au centre, seulement en traction.



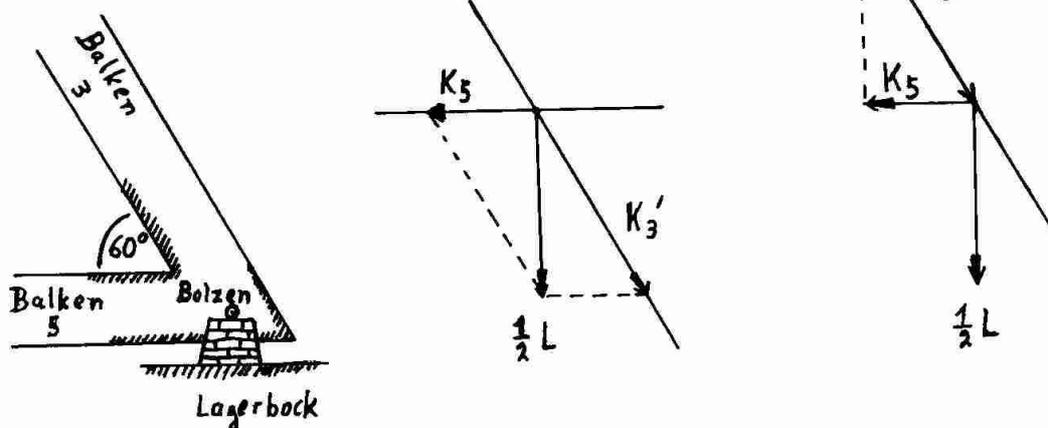
Vu que le poids des poutres peut être négligé en regard de la charge, on peut considérer que les deux points d'appui, à droite et à gauche, portent chacun exactement la moitié de la charge.

On pourrait maintenant chercher à savoir la façon dont la force fournie par la charge  $L$  est transmise depuis le milieu du pont jusqu'aux points d'appui – quelles sont les contraintes supportées par les poutres et de quelle grosseur doit-on les prévoir. Pour faciliter la recherche de ces forces, on commence par la fin et on remonte pour voir comment la force  $1/2 L$  se met en place, c'est-à-dire de quelle façon les poutres qui reposent là transmettent la charge du milieu du pont jusqu'à ce point d'application. Là encore, on négligera le poids des poutres.

On dessine l'extrémité de droite du pont et on se représente là un boulon qui porterait toutes les forces, et reposerait lui-même sur le bloc de fondation.

#### Bolzen- und Balkenkräfte am Auflager

Forces appliquées aux poutres et aux boulons au point d'appui



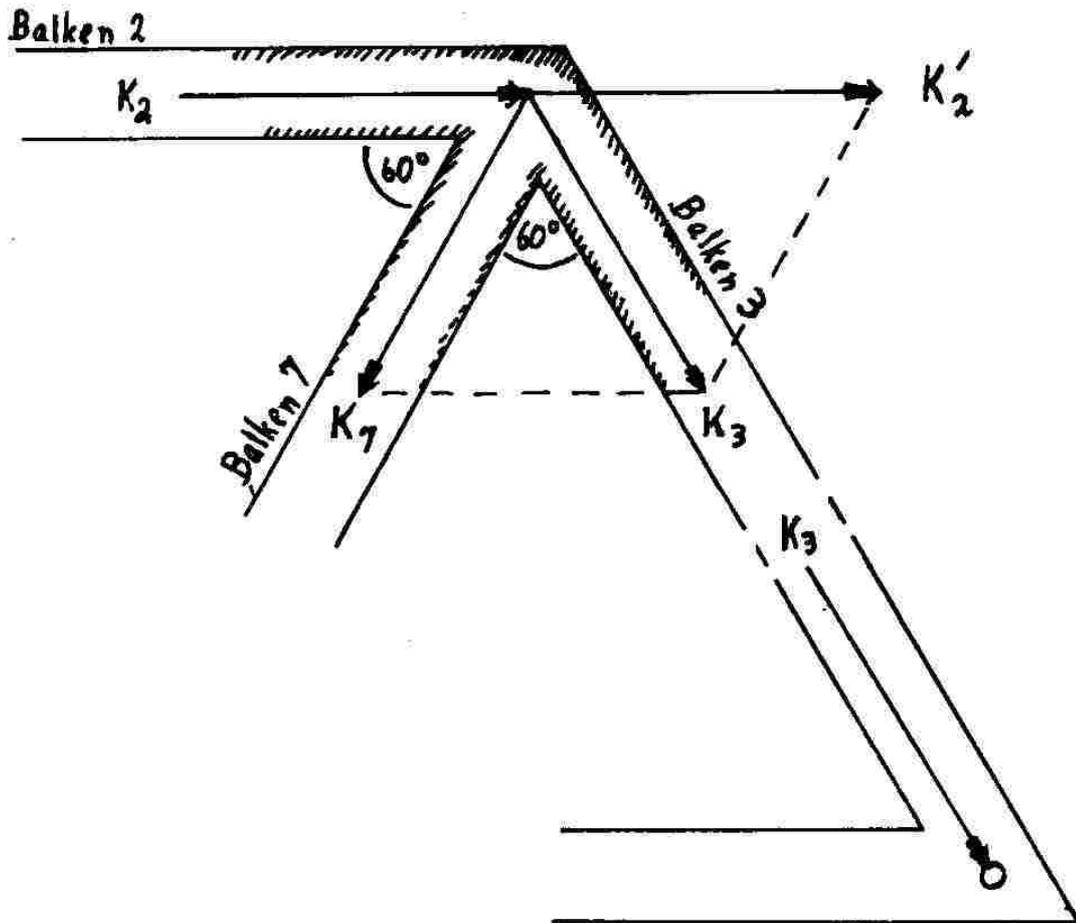
Le boulon appuie sur le bloc de fondation avec une force égale à  $1/2 L$ . La force ne provient pas du boulon, elle lui est imposée par le bois qui s'appuie sur lui. D'où le bois la reçoit-il ? Elle ne peut venir que des poutres qui arrivent là. Donc, nous décomposons  $1/2 L$  selon le parallélogramme des forces donné par les directions des poutres.  $1/2 L$  représente la résultante des deux forces  $K_5$  et  $K'_3$  que l'on dessine.  $K_5$  suit la poutre et, selon la direction de la flèche, correspond à une traction exercée sur le boulon.  $K'_3$  elle, se place du mauvais côté. Il n'y a plus de poutre là, qui porterait cette force. La poutre 3 se trouve de l'autre côté, elle part vers le haut sur la gauche. Il nous faut donc faire glisser  $K'_3$  sur sa droite d'action afin d'obtenir le juste diagramme des forces.  $K_3$ , en agissant de ce côté, est une force appliquant par la poutre 3 une compression sur le boulon. Ainsi, on a rendu clair ce que sont chacune des forces transmises par les poutres et à quel endroit elles s'appliquent. (Une décomposition pied-sur-la-tête conduirait naturellement au même résultat, il suffit de la dessiner pour s'en convaincre).

Vu que la géométrie est celle d'un triangle équilatéral, l'angle est de  $60^\circ$  et  $K_5$ ,  $K_3$  et  $1/2 L$  sont entre eux comme 1, 2 et racine de 3  $K_5 : K_3 : 1/2 L = 1 : 2 : (\text{racine de } 3)$ .

Chaque fois que trois poutres, comme dans notre pont, se retrouvent sur un nœud, on peut directement sans incertitude faire la décomposition. Passons au point suivant en remontant.  $K_3$  est la force que la poutre 3 transmet au boulon inférieur de droite, et qu'elle reçoit donc du boulon d'en haut. Or ce boulon ne peut que la recevoir des poutres qui arrivent sur lui.

## Bolzen- und Balkenkräfte rechts oben

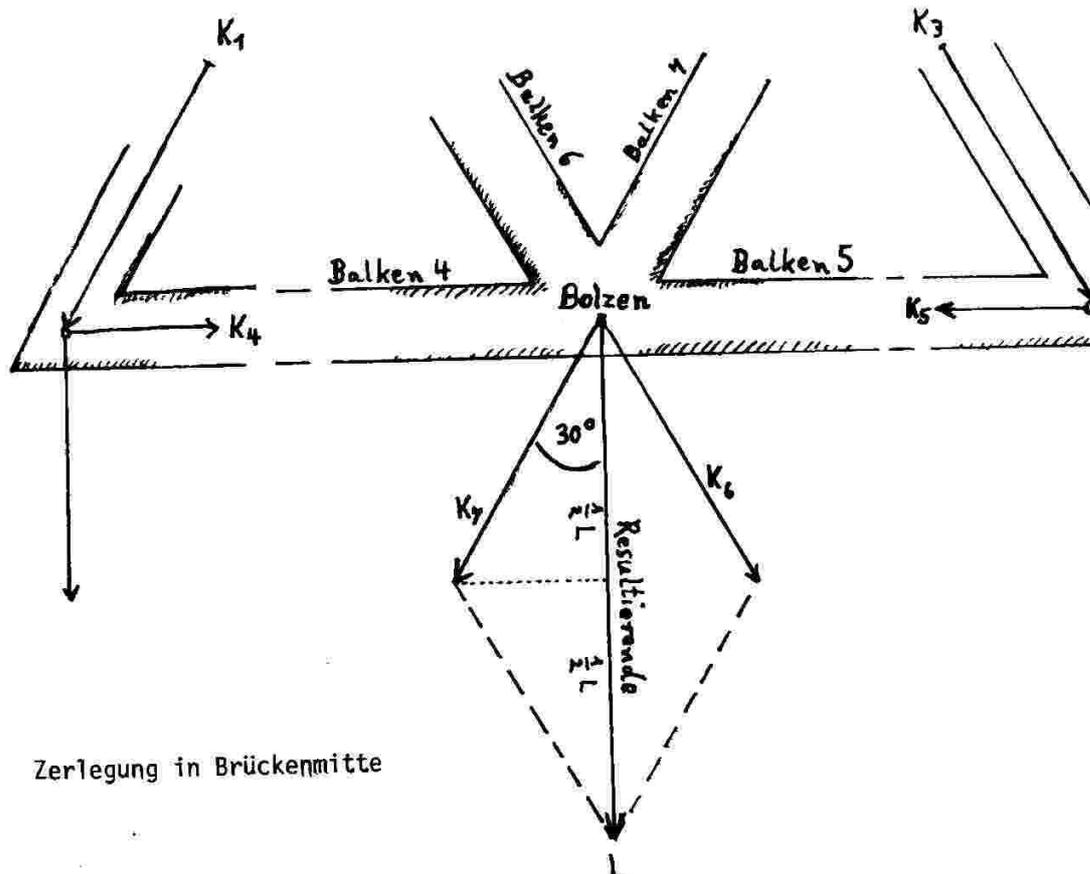
Forces appliquées aux poutres et aux boulons en haut à droite



Il nous faut donc décomposer la compression  $K_3$  appliquée au boulon dans les directions données par les poutres 2 et 7. Le parallélogramme nous fait obtenir  $K'_2$  et  $K_7$ . Vu que  $K'_2$  ne coïncide pas avec une poutre, on la translate pour obtenir  $K_2$ , dont la flèche indique une compression.  $K_7$  par contre est une traction. Vu qu'il s'agit de purs angles de  $60^\circ$ , toutes ces flèches sont de même longueur, les forces sont égales.

Ainsi, au centre du tablier où convergent quatre poutres, deux forces sont connues ; nous connaissons de plus la force  $L$  qui y est appliquée. Ici encore, s'impose la décomposition, car on ne peut à chaque fois déduire que deux forces inconnues appliquées à un nœud.

La traction  $K_7$  de la décomposition précédente est reçue de la poutre 7 par le boulon du tablier que l'on considère maintenant. La poutre 6 transmet une force de même intensité ( $K_6$ ). Cette traction orientée vers le bas ne peut venir que de la charge  $L$  :



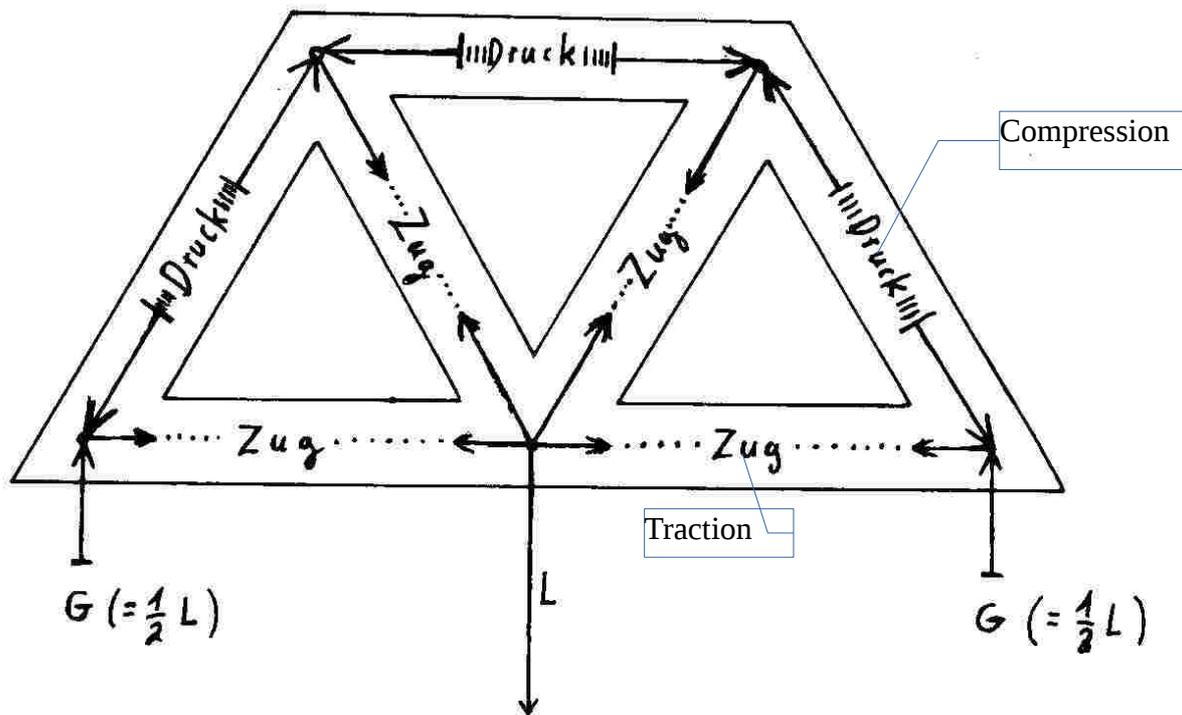
La charge tire vers le bas sur le boulon avec la force  $L$ . Le tablier (poutres 4 et 5, de poids négligeable) dont la direction est perpendiculaire à la force ne peut la modifier ni en traction ni en compression. Le boulon tire donc sur les poutres 6 et 7 et on peut décomposer la force  $L$  selon ces deux directions en  $K_6$  et  $K_7$ .

$1/2 L$  est donc le grand côté d'un triangle rectangle d'angle  $30^\circ$  dont l'hypoténuse est  $K_7$ . Vu que  $K_7$  est égale à  $K_3$  (décomposition précédente), la grandeur de  $1/2 L$  qui en résulte est donc exactement celle dont nous étions partis lors de la toute première décomposition.

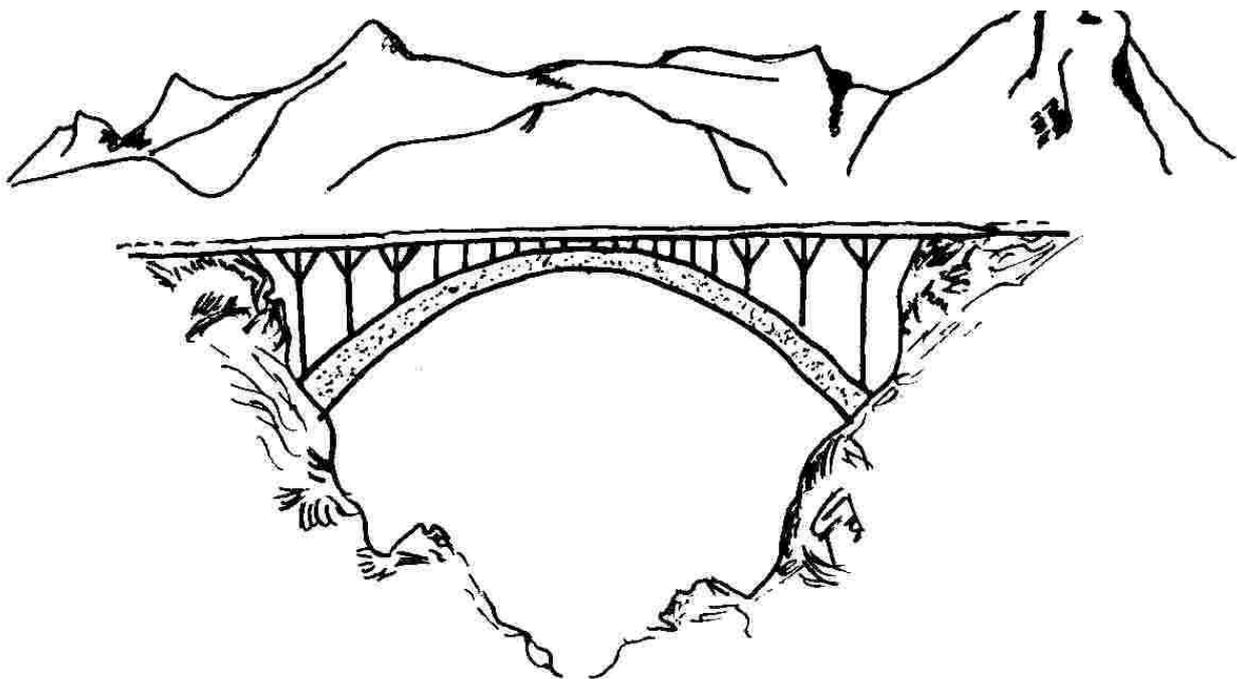
On peut aussi obtenir cela de la façon suivante.

Notre dernière décomposition ne donne aucune composante dans le tablier du pont (poutre 4 et 5). Au centre du pont, la charge n'est portée que par les poutres 6 et 7. Et là, le tablier est placé en traction. Ces forces proviennent de la toute première décomposition sur les blocs d'appui de gauche et de droite. Nous les avons déjà représentées par  $K_3$ ; en raison de la symétrie,  $K_4$  à gauche a la même intensité.  $K_3$  et  $K_4$  sont en équilibre sans que la charge au milieu y soit directement pour quelque chose.

Le diagramme complet des forces apparaît lorsqu'on considère que pour chaque poutre, la force qu'elle exerce à l'une de ses extrémités doit recevoir appui ou ancrage afin que les forces soient l'une pour l'autre dans la relation force – contre-force réactive.

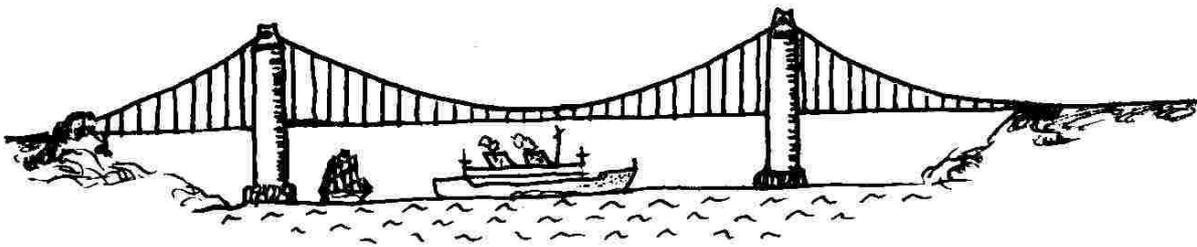


La somme de toutes les forces appliquées à un nœud (chaque boulon ou chaque bride) de même qu'à l'intérieur de chaque poutre, doit être nulle, vu que le pont est immobile. C'est ainsi qu'on obtient le diagramme des forces de la coupe d'un pont triangulé : la charge  $L$  et les contre-forces réactives des points d'appui agissent ainsi sur la structure et en garantissent l'équilibre. Les tirants et les poutres de la structure supérieure sont chargés avec la même force, les uns en traction, les autres en compression. La poutre du tablier par contre est soulagée (pour une charge immobile en son milieu). On peut, sur ce mode, allonger le pont en plaçant d'autres triangles sur les triangles... Les ponts en pure compression dans toute leur structure sont ceux qui sont portés par une voûte ; on exclut ainsi toute velléité de fléchissement du tablier.



Le plus grand pont voûté en béton armé d'Allemagne est le viaduc ferroviaire qui enjambe la Fulda près de Guntershausen sur la ligne Kassel-Bebra.

Des ouvrages en pure traction sont les ponts suspendus :



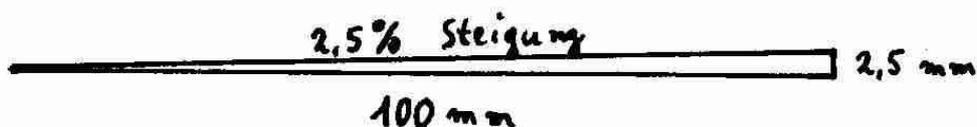
Le pont suspendu le plus célèbre du monde (deuxième en taille) franchit la Golden Gate en direction de la baie de San Francisco (Californie). Ce « Golden Gate Bridge » inauguré en 1937 a une portée de 1260 m. Ses six voies surplombent à 75 m au-dessus de la mer, et les navires trans-océaniques passent en dessous. Ses deux piliers font 224 m de haut, comme des sommets de moyenne montagne. Tout en haut passent les câbles de suspension, deux paires de 90 cm de diamètre chacune, auxquels est suspendu le tablier. Les câbles sont faits de fils d'acier torsadés de 5 mm d'épaisseur qui, mis bout à bout feraient 5 fois le tour de la terre.

Une transition entre pont à poutre et le pont à flèche, c'est le célèbre pont en porte à faux datant du XIX<sup>e</sup> siècle au-dessus du Firth of Forth en Écosse que les trains empruntent encore. Ce monstre d'acier, avec ses 513 m de portée, fut achevé en dépit de nombreuses craintes et réticences, avec un niveau particulièrement élevé de sécurisation en raison de vents particulièrement forts. ( La construction du pont sur le Forth entre autres, est décrites avec de nombreux schémas par Derrick Beckett dans le livre « Bridges », Hamling Publishing, Londres 1969). En effet, quelques années auparavant, l'un des ponts les plus sensationnels du monde franchissant un golfe maritime tout proche, le Tay, avait été englouti par les flots avec le train qu'il portait, lors d'une nuit de terrible tempête. Plus de 1 km de pont et le train tout entier ne revirent jamais la lumière du jour. Ce pont du Tay n'était vieux que de six mois. Il était très haut et très étroit, perché sur des piliers de fonte, et il est probable que les coups de boutoir de l'ouragan l'ont mis en oscillation pendulaire jusqu'à ce qu'il s'effondre sur le côté. Les moignons restants de ses piliers arrachés dépassaient encore un peu hors de l'eau.

Max Eyth a écrit une nouvelle à ce propos intitulée « Le pont par dessus la baie de Enno », et Fontane a écrit l'histoire « Le pont du Tay ». Le petit livre de Overman : « Strassen, Brücken, Tunnel », propose une approche très riche et très claire de la construction des ponts dans le monde entier.

## Plans inclinés

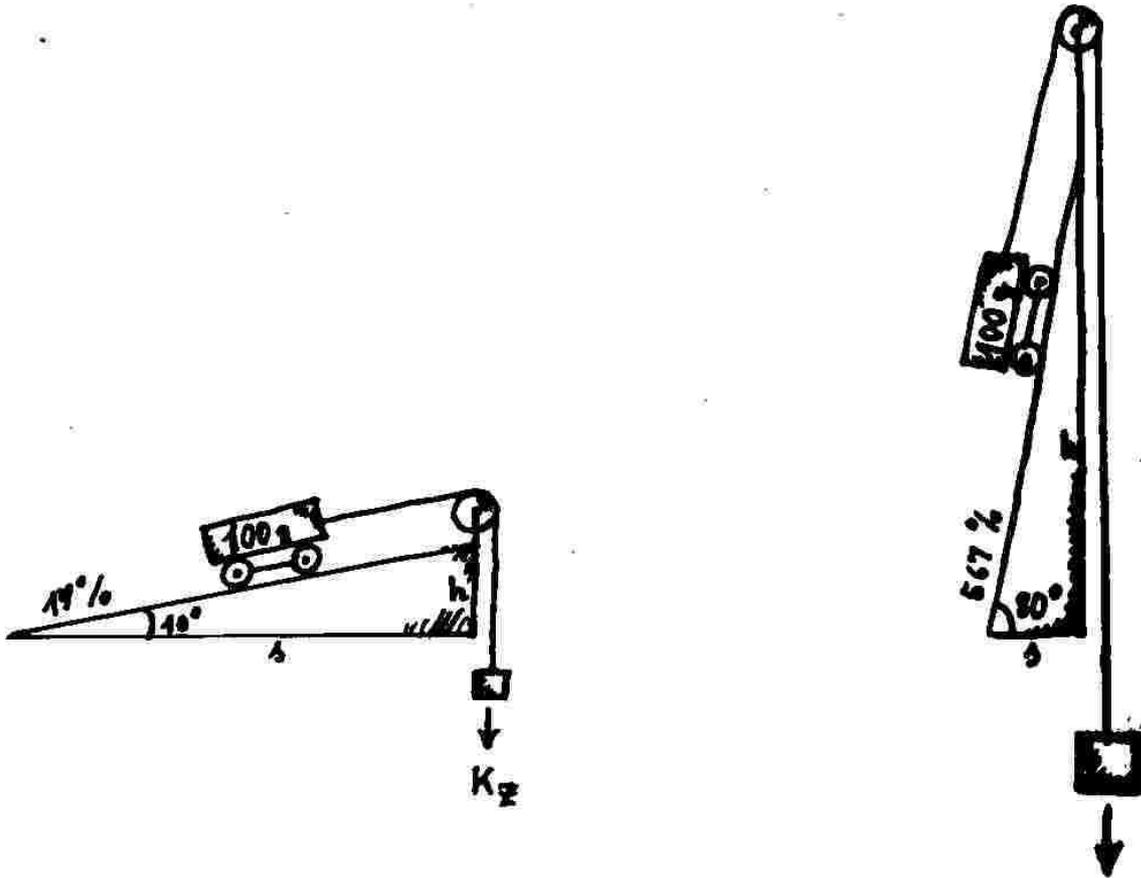
Au cours des premières décades de construction des chemins de fer, on évitait les pentes. On considérait comme un maximum une élévation de 1 m pour 100 m. Pour les grands chemins de fer de montagne comme le Gothard ou le Brenner, qui furent construits un peu plus tard, on se permit des pentes jusqu'à 2,5 % et cette limite s'applique aujourd'hui encore aux voies de trains rapides. Que représente 2,5 % ? Sur un déplacement horizontal plan de 100 m, et non pas sur la distance parcourue oblique, nécessairement supérieure, on s'élève de 2,50 m.



Lorsque la pente augmente, il faut naturellement que la locomotive fournisse à l'attelage une traction plus importante pour réussir à faire tourner les roues – sans parler des problèmes de freinage dans les descentes.

Considérons la force de traction  $K_z$  sur le câble d'un chariot pesant 100 g :

### Traction pour un plan incliné

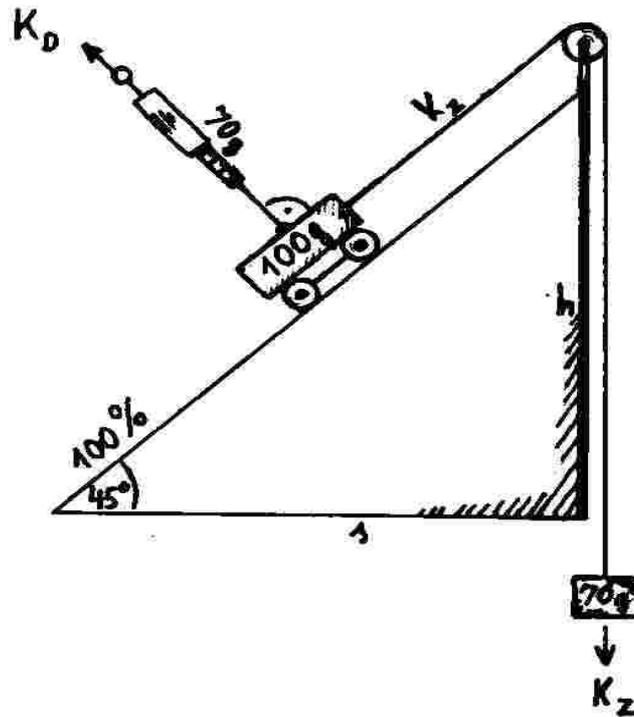


Si le chariot est sur le plan horizontal, la force de traction nécessaire pour le maintenir est évidemment égale à zéro, il ne bouge pas tout seul. Une pente de 17 % (dessin de gauche) le mettrait en mouvement, et il faudrait, pour le retenir, un petit poids accroché à la corde qui passe par la poulie. L'inclinaison, ici une pente de 17 %, s'exprime par le rapport de la hauteur  $h$  sur la longueur  $s$  : pente =  $h/s$

Ce rapport  $h/s$  est également la tangente de l'angle d'inclinaison, donc ici  $\tan 10^\circ = 0,17$ .

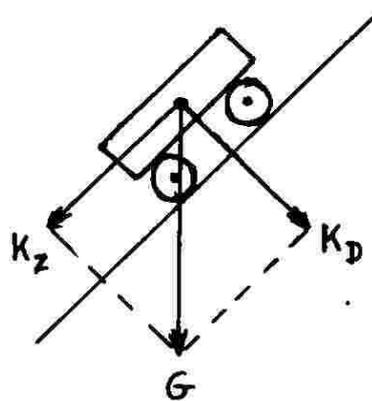
Ainsi, pour le dessin de droite le plan incliné a une pente de 567 % . De telles inclinaisons ne sont d'habitude plus exprimées en en pourcentage, mais par leur angle, soit dans notre exemple  $80^\circ$  . La traction sur la corde est beaucoup plus grande que pour la faible pente. C'est presque tout le poids du chariot qui tire sur la corde. Il est clair qu'en même temps, la pression des roues sur le plan est inférieure à 100 g. Si le plan est mis vertical, le chariot est pendu à la corde avec une force de 100 g et il n'a plus besoin du contact avec le plan. On peut supposer que la pression sur le plan est déjà un peu inférieure à 100g sur le dessin de gauche, avec la faible inclinaison, car la corde tire déjà un peu vers le haut. Mais qu'en est-il pour une pente de  $45^\circ$  ?

L'expérience donne les forces suivantes :



Le poids tire à la poulie avec une force de 70 g. Le chariot pèse 100 g. Le peson qui décolle le chariot au-dessus du plan, mesure la compression  $K_D$  exercée sur le plan incliné : il indique ici 70 g.  $K_D$  et  $K_Z$  portent ensemble le poids du chariot. Nous rencontrons ici à nouveau une situation où une force (100 g) semble se démultiplier lorsqu'elle se décompose en deux ( $70 + 70 = 140$  g). Mais ceci vient du fait que la traction et la compression, toutes les deux causées par le poids, agissent en partie l'une contre l'autre, et doivent donc être supérieure à la moitié du poids agissant. L'angle entre les deux forces est, dans le plan incliné, toujours égal à  $90^\circ$  ; en effet, par rapport au plan incliné, la traction est toujours parallèle, et la compression, toujours perpendiculaire. Si nous réalisons la décomposition du poids  $G$  selon la loi du parallélogramme, nous obtenons par résolution graphique exactement les valeurs mesurées. Un calcul avec le théorème de Pythagore le confirme :

$K_Z$  est la force avec laquelle le chariot tire vers le bas sur la corde, la corde doit le retenir avec une force opposée égale.  $K_D$  est la force avec laquelle le chariot appuie sur le plan. Elle doit être équilibrée par une force opposée (réaction, force de frottement) pour que le chariot soit soutenu. On remarquerait avec un peson que  $K_D$  est plus petite que  $G$  : elle comprime moins sur un plan incliné que sur un plan horizontal. Vu qu'on est toujours en présence de triangles rectangles, on peut écrire :



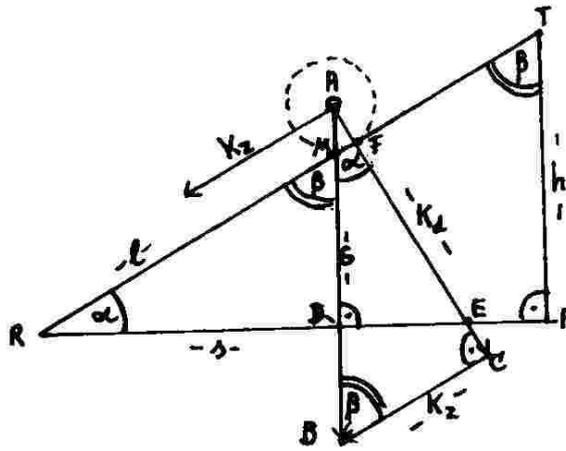
$$K_D^2 + K_Z^2 = G^2$$

Pour  $45^\circ$ , on doit avoir  $K_D = K_Z$

$$\text{donc } 2 \cdot K_Z^2 = G^2 \quad K_Z = (1/\text{racine de } 2) \cdot G$$

$$G \quad K_Z = 0,707 \cdot G$$

Comment trouver la traction pour des angles différents de  $45^\circ$ , par exemple pour l'exemple mentionné précédemment d'une voie ferrée de montagne ?



Nous dessinons en guise d'objet sur le plan incliné une boule. Son poids agit verticalement vers le bas à partir de son centre de gravité ; nous choisissons une longueur de flèche qui va jusqu'au point B (choix de l'échelle). Les autres longueurs de flèches sont maintenant fixées. La décomposition de G selon la règle du pied-sur-la-tête donne en effet la compression  $K_d$  (jusqu'au

point C) et la traction  $K_z$  (segment CB). La flèche  $K_z$  doit encore être translatée parallèlement afin de s'appliquer à A. Elle représente la force dans la direction de laquelle la boule A tire sur une corde accrochée, et donc avec laquelle, dans le sens opposé, la corde tire pour l'empêcher de rouler. Quelle est la valeur de cette traction  $K_z$  ? Il existe deux méthodes géométriques pour la déduire et la calculer à partir de l'inclinaison du plan, dont elle dépend.

Considérons d'abord l'angle. Le triangle ABC comporte en B un angle  $\beta$ . Ce même angle  $\beta$  se retrouve en tant qu'angle opposé, à gauche, en M dans le triangle RDM. Comme ce triangle est rectangle en D comme l'autre l'est en C, ces deux triangles sont semblables. On retrouve donc en R l'angle  $\alpha$ . Vu que le triangle de l'inclinaison RTP est aussi par construction un triangle rectangle, il est également semblable aux deux autres et l'angle  $\beta$  se retrouve en T. Nous utilisons ici toujours le théorème : lorsque dans un triangle, deux angles sont égaux à deux autres d'un autre triangle, c'est que les trois angles de ces deux triangles sont égaux, puisque le troisième est le supplément de la somme des deux autres. Les deux triangles sont donc semblables, c'est-à-dire que les rapports des côtés entre eux sont les mêmes, dans les deux triangles. On a donc : le segment  $K_z$  est, avec le segment G dans le même rapport que h à l.

$$K_z/G = h/l \quad K_z = G \cdot h/l$$

La similitude du triangle de forces ABC avec le triangle de la pente, peut encore être démontrée d'une autre façon. En effet, tous ces triangles sont rectangle et comportent un angle commun, ils sont donc semblables ; ABC semblable à ADE, semblable à RDM, semblable à RTP.

Ainsi, par deux chemins, nous avons établi la loi suivante : La traction est, avec le poids dans le même rapport que la hauteur à la longueur du plan incliné – et non-pas à sa projection sur l'horizontale. Les pentes sur les cartes et sur les panneaux indicateurs, sont hélas données en hauteur sur distance horizontale. Cela entraîne un alourdissement du calcul. La donnée de la hauteur rapportée à la projection horizontale correspond à la tangente de l'angle  $\alpha$ . On doit d'abord rechercher ce qu'on appelle l'argument de grandeur h/s (égal à l'inclinaison donnée) de l'angle  $\alpha$  de la tangente :

$\tan \alpha = h/s =$  pente donnée sur les panneaux indicateurs, par exemple.

À partir de la tangente on peut chercher la valeur de l'angle  $\alpha$ .

Le rapport que l'on cherche,  $K_z/G$  est le sinus de l'angle  $\alpha$ . Donc :

$$K_z/G = \sin \alpha \quad K_z = G \cdot \sin \alpha$$

Cela veut dire qu'à partir de l'angle  $\alpha$ , on cherche son sinus que l'on multiplie par G. Et l'on obtient ainsi ma valeur de  $K_z$ .

Jusqu'à un angle de  $8^\circ$ , c'est à dire des pentes jusqu'à 14 %, la différence entre sinus et tangente est inférieure à 1 %. Pour rester dans cette précision, on peut s'épargner le calcul du sinus à partir de la tangente et utiliser directement :

$$K_z = \text{pourcentage de pente} \times G/100$$

La force de traction sur le crochet de traction d'un train de marchandises qui, sans locomotive, pèse 1000 tonnes, est donc, dans le cas d'une pente de 2 % :

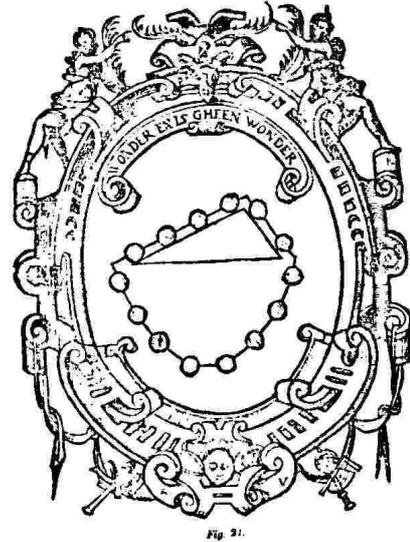
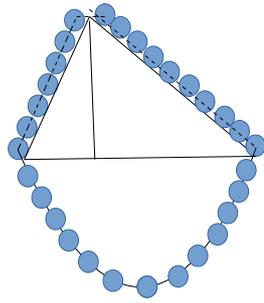
$$K_z = 0,025 \cdot G = 250 \text{ t}$$

Donc, rapidement : la traction est de 2,5 % de G Le résultat a une précision supérieure à 1/100 et suffit donc largement pour les calculs dans la pratique.

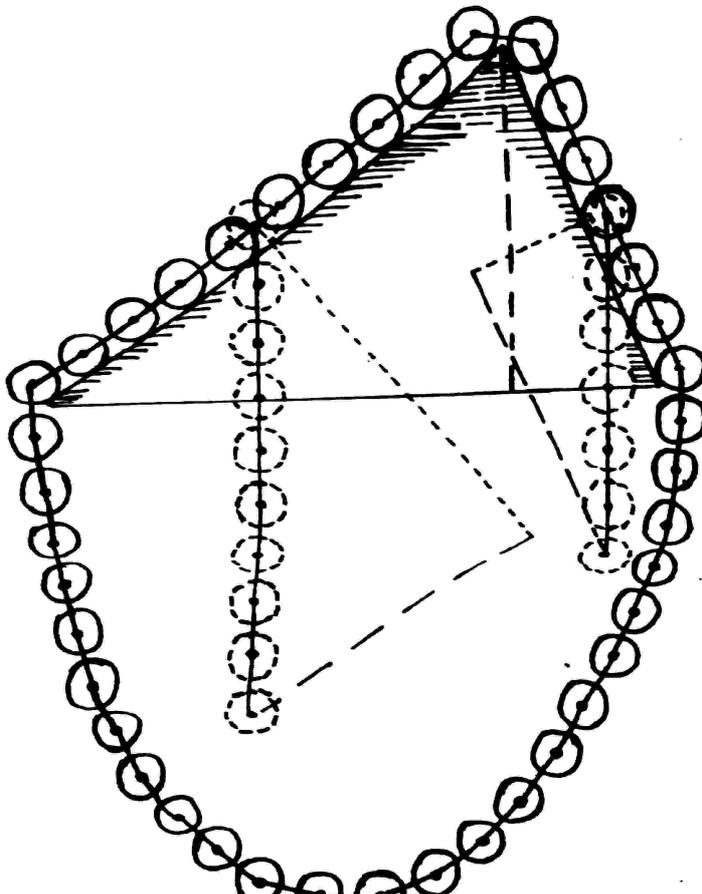
Une autre méthode de résolution serait le diagramme précis. On place le triangle rectangle formé par G, et  $K_z$  et  $K_d$  qui en sont la décomposition. On choisit pour cela une échelle de correspondance, par ex 1 cm pour 100 tonnes. Les longueurs de flèches de  $K_z$  et  $K_d$  mesurées sur le diagramme et reconverties de cm en tonnes, nous donnent alors les résultats recherchés

## La figure de Stevin

Vers l'année 1600, alors que la notion de parallélogramme de forces était en plein développement, le chercheur hollandais Stevin écrivit un livre de mécanique. Sur la couverture, il dessina l'image suivante :



Le commentaire en hollandais disait « Miracle, ce n'est pas un miracle ». La question était de savoir si une couronne de boules pouvait ou non se mettre en mouvement toute seule, vu que les boules de gauche, sur le côté pentu du triangle exerceraient une traction plus forte sur la pointe que les boules de l'autre côté – donc que la couronne se mettrait à tourner. Or vu qu'à droite, de nouvelles boules étaient constamment tirées sur le côté du triangle et remontaient jusqu'à ce qu'elles reviennent tirer vers le bas sur le côté pentu avec une force accrue, la couronne ne devait jamais s'arrêter ! C'est vraiment une figure magique. Mais on a bientôt le sentiment qu'il y a une impossibilité. La couronne va rester immobile sur le triangle. Mais comment les tractions des boules peuvent-elles maintenir l'équilibre sur les côtés des triangles pour les diverses formes de triangles plus ou moins pointus ? Les quelques boules du côté pentu doivent chacune tirer d'autant plus fort vu que les boules du côté en pente douce sont plus nombreuses.



On peut assurément ne pas tenir compte des boules suspendues en arc en dessous, car, en raison de la symétrie, elles tirent pareil à gauche et à droite. On peut de chaque côté rassembler tout le poids des boules en une seule – c'est comme si une seule boule de chaque côté avait le poids de toute sa série. On peut dessiner comme si les autres boules du côté correspondant étaient suspendues à celle-ci (voir dessin). On a bien alors le bon poids de chaque côté. Faisons alors de chaque côté, la décomposition des forces pour établir la valeur de la traction. Comme échelle des poids, nous choisissons la longueur du côté sur lequel reposent les boules. C'est à chaque fois la longueur de la série de boules que nous avons ajoutée en suspension (pointillé). Puis nous traçons les triangles. Selon la géométrie du plan incliné que nous avons vue, chaque triangle est égal à un des triangles partiels qu'engendre la hauteur du triangle du départ. Et chacun de ces triangles a un côté égal à cette hauteur (qui représente la traction exercée) : les tractions produites sont donc bien égales de chaque côté, quelle que soit la forme du triangle. La couronne de boules, Dieu soit loué, restera bien immobile jusqu'à la fin des temps (ou-bien...?).